

Chapitre 8 : ESPACES VECTORIELS DE DIMENSION FINIE

Les espaces vectoriels ont été définis dans le Chapitre 6 et nous avons mis en évidence quelques-unes de leurs principales propriétés.

Dans ce chapitre, nous complétons cette étude par l'examen des espaces vectoriels de dimension finie. Nous verrons en particulier qu'un espace vectoriel de dimension finie peut être complètement définie par sa dimension. En fait, un K -espace vectoriel de dimension n est isomorphe à K^n .

En plus des propriétés générales des applications linéaires que nous avons étudiées au Chapitre 7, nous obtiendrons d'autres propriétés valables lorsque les espaces sont de dimension finie. Ainsi nous verrons que si E et F sont des K -espaces vectoriels de dimension finie, alors le K -espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$ est de dimension finie.

8.1. Le théorème de la dimension

Rappelons qu'un K -espace vectoriel E est dit de **dimension finie** s'il possède une famille génératrice finie. Dans le cas contraire, on dit que E est de **dimension infinie**.

Pour l'instant, nous n'avons défini que la locution « dimension finie » mais nous verrons bientôt ce qu'est la dimension d'un K -espace vectoriel.

8.1.1. EXISTENCE DE BASES EN DIMENSION FINIE

8.1.1.1. Théorème

Soient E un K -espace vectoriel non nul de dimension finie, G une partie génératrice finie de E et L une partie libre contenue dans G . Alors, il existe une base B de E telle que $L \subset B \subset G$.

Démonstration. Soit $\mathcal{L}$ l'ensemble des parties libres X de E telles que $L \subset X \subset G$. $\mathcal{L}$ n'est pas vide car $L \in \mathcal{L}$ et $\mathcal{L}$ est fini puisque, G étant fini, l'ensemble $\mathcal{P}(G)$ des parties de G est finie et $\mathcal{L} \subset \mathcal{P}(G)$. En outre tout élément de $\mathcal{L}$ possède un nombre fini d'éléments. Choisissons dans $\mathcal{L}$ une partie B ayant le plus grand nombre possible d'éléments. Soit p ce nombre et montrons que B est une base

de E . Il suffit de montrer que B est une partie génératrice de E puisque par construction B est une partie libre de E .

Comme G engendre E , il suffit de voir que tout élément de G est combinaison linéaire des éléments de B .

Si $\text{card}(G) = p$, alors on a $B = G$. La partie génératrice G de E est donc libre. Par conséquent G est une base de E et le théorème est démontré.

Supposons maintenant que $p < \text{card}(G)$. Si x est un élément de G n'appartenant pas à B , l'ensemble $B \cup \{x\}$ est contenu dans G et possède $(p+1)$ éléments. Donc la famille $B \cup \{x\}$ est liée. Si $B = \{x_1, \dots, x_p\}$, il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_p, \lambda$ non tous nuls tels que $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p + \lambda x = 0$.

On a nécessairement $\lambda \neq 0$, car si $\lambda = 0$ les éléments de B vérifieraient une combinaison linéaire nulle à coefficients non tous nuls et B ne serait pas libre. On en déduit

$$x = -\frac{\lambda_1}{\lambda} x_1 - \dots - \frac{\lambda_p}{\lambda} x_p.$$

Ainsi tout élément $x \in G$ est combinaison linéaire des éléments de B et le théorème est démontré. $\square$

Le théorème 8.1.1.1 admet des conséquences importantes que nous allons examiner.

8.1.1.2. Corollaire

Tout espace vectoriel E de dimension finie, non réduit à $\{0\}$, admet une base finie.

En effet, par définition, E admet une partie génératrice finie $G = \{x_1, \dots, x_n\}$ et il existe un $x_i \in G$ non nul puisque $E \neq \{0\}$. Il suffit de poser $L = \{x_i\}$ et d'appliquer le Théorème 8.1.1.1 à L et à G .

8.1.1.3. Corollaire (Théorème de la base incomplète)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps K . Pour toute partie libre $\{x_1, \dots, x_p\}$ de E , il existe des vecteurs $y_1, y_2, \dots, y_q$ de E tels que $(x_1, x_2, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q)$ soit une base de E .

Démonstration. Posons $L = \{x_1, \dots, x_p\}$ et soit G une famille génératrice finie de E . Alors $L \cup G$ est une famille génératrice finie de E et on a $L \subset L \cup G$. D'après le Théorème 8.1.1.1, il existe une base B telle que $L \subset B \subset L \cup G$; on peut mettre B sous la forme $B = L \cup H$, où H est une partie de G .

8.1.2. DIMENSION

Nous venons de voir que dans un espace vectoriel de dimension finie, il existe toujours une base finie. Nous allons démontrer maintenant que toutes les

bases ont le même nombre d'éléments. Pour cela, nous aurons besoin d'utiliser le lemme suivant.

8.1.2.1. Lemme

Soient E un K -espace vectoriel et n vecteurs $x_1, \dots, x_n$ de E . Si les vecteurs $y_1, \dots, y_{n+1}$ sont des combinaisons linéaires de $x_1, \dots, x_n$, alors la famille $\{y_1, \dots, y_{n+1}\}$ est liée.

Démonstration. Raisonnons récurrence sur n .

Pour $n = 1$, il existe $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ tels que $y_1 = \alpha_1 x_1$ et $y_2 = \alpha_2 x_1$.

On en déduit, par élimination de x_1 :

$$\alpha_1 y_2 - \alpha_2 y_1 = 0.$$

Si les deux scalaires α_1 et α_2 ne sont pas nuls en même temps, la famille $\{y_1, y_2\}$ est liée. Si $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, on a $y_1 = y_2 = 0$ et la famille $\{y_1, y_2\}$ est encore liée.

Le lemme est donc vrai si $n = 1$. Supposons-le établi pour $n - 1$ vecteurs et démontrons-le pour n vecteurs.

Soient $y_1, y_2, \dots, y_{n+1}$ des combinaisons linéaires de $x_1, \dots, x_n$. On peut écrire

$$(8.1.2.1) \quad y_1 = z_1 + \alpha_1 x_n, \dots, y_{n+1} = z_{n+1} + \alpha_{n+1} x_n$$

où les vecteurs $z_1, \dots, z_{n+1}$ sont des combinaisons linéaires de $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$.

Envisageons les deux cas suivants :

1^{er} cas : $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{n+1} = 0$.

Alors $y_1, y_2, \dots, y_{n+1}$ sont des combinaisons linéaires de $x_1, \dots, x_{n-1}$. D'après l'hypothèse de récurrence, les n vecteurs $y_1, \dots, y_n$ sont linéairement dépendants ; *à fortiori*, les vecteurs $y_1, \dots, y_{n+1}$ sont linéairement dépendants et le lemme est démontré dans ce cas.

2^e cas : L'un au moins des α_i est non nul.

En changeant au besoin l'ordre de la numérotation, on peut supposer que $\alpha_{n+1} \neq 0$. Alors x_n est combinaison linéaire de $y_{n+1}, x_1, \dots, x_{n-1}$:

$$x_n = \frac{1}{\alpha_{n+1}} (y_{n+1} - z_{n+1}).$$

En prenant dans les n premières relations (8.1.2.1), on voit que $y_1, y_2, \dots, y_n$ sont des combinaisons linéaires de $y_{n+1}, x_1, \dots, x_{n-1}$:

$$y_1 = z_1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_{n+1}} (y_{n+1} - z_{n+1}), \dots, y_n = z_n + \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} (y_{n+1} - z_{n+1}),$$

d'où, pour $1 \leq i \leq n$,

$$y_i - \frac{\alpha_i}{\alpha_{n+1}} y_{n+1} = z_i - \frac{\alpha_i}{\alpha_{n+1}} z_{n+1}$$

ce qui montre que les n vecteurs $y_i - \frac{\alpha_i}{\alpha_{n+1}} y_{n+1}$, $1 \leq i \leq n$, sont des combinaisons linéaires des $n - 1$ vecteurs $x_1, \dots, x_{n-1}$. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ non tous nuls tels que

$$\lambda_1 \left(y_1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_{n+1}} y_{n+1} \right) + \dots + \lambda_n \left(y_n - \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} y_{n+1} \right) = 0.$$

Si on pose

$$\lambda_{n+1} = -\frac{\lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_n \alpha_n}{\alpha_{n+1}},$$

on obtient

$$\lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_{n+1} y_{n+1} = 0$$

où les scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ ne sont pas tous nuls. La famille $\{y_1, \dots, y_{n+1}\}$ est donc liée et le lemme est démontré. $\square$

8.1.2.2. Théorème

Dans un espace vectoriel E de dimension finie, toutes les bases ont le même nombre d'éléments.

Démonstration. On sait déjà que tout espace vectoriel E de dimension finie possède au moins une base finie. Soient $B = (x_1, \dots, x_n)$ et $B' = (e_1, \dots, e_m)$ deux bases de E .

Comme $e_1, \dots, e_m$ sont des combinaisons linéaires de $x_1, \dots, x_n$, si on avait $m > n$, la suite $(e_1, \dots, e_m)$ serait liée d'après le Lemme 8.1.2.1, ce qui est impossible puisque $(e_1, \dots, e_m)$ est une base. Donc $m \leq n$.

On montrerait de même que $n \leq m$, d'où $n = m$.

Le théorème précédent nous permet de définir la dimension d'un espace vectoriel.

8.1.2.3. Définition

*Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie. On appelle **dimension** de E , et on note $\dim_K(E)$ ou $\dim(E)$, le nombre d'éléments d'une base quelconque de E .*

On pose par définition $\dim(\{0\}) = 0$.

8.1.2.4. Remarque

La dimension d'un espace vectoriel dépend du corps de base. Ainsi $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$ mais $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$. Plus généralement tout $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension n est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension $2n$.

8.1.2.5. Exemple

La base canonique de K^n contient n vecteurs. Donc

$$\dim_K(K^n) = n.$$

8.1.2.6. Exemple

$\dim_K(K_n[X]) = n + 1$ car la base $B = \{1, X, X^2, \dots, X^n\}$ de $K_n[X]$ contient $n + 1$ éléments.

8.1.2.7. Théorème

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps K . Alors :

a) *Toute partie libre L de E possède au plus n éléments. Si ce nombre d'éléments est égal à n , L est une base de E .*

b) *Toute famille génératrice G de E possède au moins n éléments. Si ce nombre d'éléments est égal à n , G est une base de E .*

Démonstration. a) D'après le Théorème 8.1.1.1, il existe une base B de E telle que $L \subset B$. Comme B possède n éléments, L possède au plus n éléments. Si L possède n éléments, alors $L = B$ et L est une base de E .

b) De même, il existe une base B de E telle que $B \subset G$. Comme B possède n éléments, G possède au moins n éléments. Si G possède n éléments, on a $G = B$ et G est une base de E . $\square$

Donnons maintenant une caractérisation des bases en dimension finie. Ce résultat permet de montrer le plus souvent, qu'une partie B est une base.

8.1.2.8. Théorème

Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie n et soit B une partie de E . Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) *B est une base de E .*

b) *B est une partie libre de E et B possède n éléments.*

c) *B est une partie génératrice de E ayant n éléments.*

Démonstration. a) $\implies$ b) est évident.

b) $\implies$ c) Si B n'était pas une partie génératrice, on pourrait la compléter pour obtenir une base (Corollaire 8.1.1.3) et cette base aurait au moins $n + 1$ éléments, ce qui est absurde puisque toutes les bases possèdent n éléments.

c) $\implies$ a) Si B n'était pas libre, on pourrait en extraire une base de E , possédant au plus $(n - 1)$ éléments, ce qui contredirait la définition de la dimension.

8.1.3. DIMENSION D'UN SOUS-ESPACE VECTORIEL

8.1.3.1. Théorème

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps K et soit F un sous-espace vectoriel de E .

a) F est de dimension finie et $\dim_K(F) \leq \dim_K(E)$.

b) $\dim_K(F) = \dim_K(E)$ si et seulement si $F = E$.

c) F admet un supplémentaire F_1 et on a

$$\dim_K(E) = \dim_K(F) + \dim_K(F_1).$$

Démonstration. a) Toute partie libre L de F est une partie libre de E ; donc L possède au plus n éléments. Choisissons une partie libre $B = \{x_1, \dots, x_p\}$ de F dont le nombre p d'éléments est le plus grand possible. On a $p \leq n$.

Montrons que B est une base de F . Pour cela, il suffit de montrer que B est une partie génératrice de F puisqu'elle est libre. Il s'agit de montrer que le sous-espace vectoriel B' de F engendré par B est égale à F . Si on avait $B' \neq F$, il existerait un vecteur x de F qui ne serait pas combinaison linéaire des éléments de B . Montrons que les vecteurs $x, x_1, \dots, x_p$ sont linéairement indépendants. Considérons en effet une relation de la forme

$$\lambda x + \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p = 0.$$

Si $\lambda \neq 0$, λ^{-1} existe et on a

$$x = -\frac{\lambda_1}{\lambda} x_1 - \dots - \frac{\lambda_p}{\lambda} x_p$$

ce qui est absurde; donc $\lambda = 0$. Il reste $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p = 0$, donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0$, puisque $x_1, \dots, x_p$ sont linéairement indépendants. Donc la relation $\lambda x + \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p = 0$ entraîne $\lambda = \lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$ et la famille $\{x, x_1, \dots, x_p\}$ est bien libre. On aboutit à une contradiction puisque par hypothèse p est le nombre maximum de vecteurs linéairement indépendants de F . Donc $B' = F$ et par suite F est de dimension $p \leq n = \dim(E)$.

b) Si $\dim_K(F) = \dim_K(E)$, toute base B de F est une partie libre de E ayant n éléments; c'est donc une base de E d'après le Théorème 8.1.2.8. Alors tout vecteur de E est combinaison linéaire des éléments de B , donc appartient à F . Par conséquent $F = E$.

c) Soit $(x_1, \dots, x_p)$ une base de F . Comme E est de dimension n , il existe $n - p$ vecteurs $x_{p+1}, \dots, x_n$ tels que $(x_1, \dots, x_p, x_{p+1}, \dots, x_n)$ soit une base de E (Corollaire 8.1.1.3).

La famille $\{x_{p+1}, \dots, x_n\}$, sous-famille d'une famille libre de E , est libre. Le sous-espace vectoriel F_1 de E qu'elle engendre est de dimension $n - p$.

D'autre part, tout vecteur $x \in E$ s'écrit de façon unique sous la forme :

$$x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p + \lambda_{p+1} x_{p+1} + \dots + \lambda_n x_n = y + z$$

où $y = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p \in F$ et $z = \lambda_{p+1} x_{p+1} + \dots + \lambda_n x_n \in F_1$, ce qui montre que $E = F \oplus F_1$ et

$$\dim_K(E) = \dim_K(F) + \dim_K(F_1).$$

8.1.3.2. Théorème

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps K et soit F un sous-espace vectoriel de E . Alors l'espace vectoriel quotient E/F est de dimension finie et on a :

$$\dim(E) = \dim(F) + \dim(E/F).$$

On appelle **codimension** de F dans E et on note $\text{codim}_K(F)$ ou $\text{codim}(F)$, la dimension de E/F .

Démonstration. D'après le théorème précédent, F est de dimension finie et $\dim(F) \leq \dim(E)$. Soit $(x_1, \dots, x_m)$ une base de F . D'après le Théorème de la base incomplète, il existe des vecteurs $y_1, \dots, y_p$ de E tels que $(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_p)$ soit une base de E . tout vecteur $x \in E$ s'écrit alors de façon unique :

$$x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m + \alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_p y_p$$

où les λ_i et les α_i sont des scalaires.

D'où

$$\begin{aligned} x + F &= \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m + \alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_p y_p + F \\ &= \alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_p y_p + F \end{aligned}$$

puisque $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m \in F$.

Or, d'après la définition de la structure vectorielle de E/F ,

$$\alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_p y_p + F = \alpha_1 (y_1 + F) + \dots + \alpha_p (y_p + F),$$

donc les éléments $y_1 + F, \dots, y_p + F$ engendrent l'espace vectoriel quotient E/F . Il reste à montrer que ces classes sont linéairement indépendantes.

Supposons que

$$c_1(y_1 + F) + \dots + c_p(y_p + F) = 0 + F$$

où $0 + F = F$ est l'élément 0 de l'espace E/F . Alors $c_1 y_1 + \dots + c_p y_p \in F$ et le vecteur $c_1 y_1 + \dots + c_p y_p$ est combinaison linéaire des vecteurs $x_1, \dots, x_m$:

$$c_1 y_1 + \dots + c_p y_p = \mu_1 x_1 + \dots + \mu_m x_m.$$

Comme les vecteurs $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_p$ sont linéairement indépendants, on en déduit

$$c_1 = c_2 = \dots = c_p = \mu_1 = \dots = \mu_m = 0.$$

Ainsi, l'espace vectoriel quotient E/F admet pour base les p classes $y_1 + F, \dots, y_p + F$ et on a

$$\dim(E/F) = p = (m + p) - m = \dim(E) - \dim(F).$$

8.1.3.3. Remarque

Les Théorèmes 8.1.3.1 et 8.1.3.2 montrent que la codimension d'un sous-espace vectoriel F est égale à la dimension d'un supplémentaire de F .

8.1.3.4. Théorème

Soit E un K -espace vectoriel. Si $E_1, \dots, E_n$ sont des sous-espaces vectoriels de dimension finie, et si $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_n$ alors E est de dimension finie et on a

$$\dim(E) = \sum_{i=1}^n \dim(E_i).$$

Démonstration. Posons $p_i = \dim(E_i)$. Soit $B_i = (e_{i1}, \dots, e_{ip_i})$ une base de E_i pour $1 \leq i \leq n$. Comme E est somme directe des E_i , on a (Théorème 6.2.4.4) $E_i \cap \sum_{j \neq i} E_j = \{0\}$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ donc $E_i \cap E_j = \{0\}$ si $i \neq j$ et par

suite $B_i \cap B_j = \emptyset$ si $i \neq j$ car le vecteur nul n'appartient à aucune famille libre. D'après l'hypothèse, tout vecteur $x \in E$ s'écrit de façon unique sous la forme :

$$x = (\lambda_{11}e_{11} + \dots + \lambda_{1p_1}e_{1p_1}) + \dots + (\lambda_{n1}e_{n1} + \dots + \lambda_{np_n}e_{np_n}) ;$$

donc (Théorème 6.3.3.2) la suite $(e_{11}, \dots, e_{1p_1}, \dots, e_{n1}, \dots, e_{np_n})$ est une base de E qui est donc de dimension $p_1 + \dots + p_n$.

8.1.3.5. Théorème

Soient $E_1, \dots, E_p$ des K -espaces vectoriels de dimension finie $n_1, \dots, n_p$ respectivement. Alors l'espace vectoriel $E_1 \times \dots \times E_p$ a pour dimension $n_1 + \dots + n_p$.

Démonstrations. a) cas où $p = 2$: Soient E_1 et E_2 deux K -espaces vectoriels de dimension finie n et m respectivement. Soient $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E_1 , $(f_1, \dots, f_m)$ une base de E_2 .

Considérons la famille $\mathcal{B}$ de vecteurs de $E_1 \times E_2$:

$$\mathcal{B} = \{(e_1, 0), \dots, (e_n, 0), (0, f_1), \dots, (0, f_m)\}.$$

Tout élément de $E_1 \times E_2$ s'écrit :

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^m y_j f_j \right)$$

ou, en utilisant les lois définies sur $E_1 \times E_2$:

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, 0 \right) + \left(0, \sum_{j=1}^m y_j f_j \right) = \sum_{i=1}^n x_i (e_i, 0) + \sum_{j=1}^m y_j (0, f_j),$$

ce qui montre que la famille $\mathcal{B}$ engendre l'espace vectoriel $E_1 \times E_2$.

De plus, la famille $\mathcal{B}$ est libre dans $E_1 \times E_2$. Soit en effet

$$\alpha_1 (e_1, 0) + \dots + \alpha_n (e_n, 0) + \lambda_1 (0, f_1) + \dots + \lambda_m (0, f_m) = 0$$

une combinaison linéaire nulle des vecteurs de $\mathcal{B}$. On a, en remontant les calculs précédents :

$$(\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n, \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_m f_m) = (0, 0).$$

On en déduit

$$\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = 0 \text{ et } \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_m f_m = 0,$$

d'où $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = \lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$.

La famille $\mathcal{B}$ des $n + m$ vecteurs de $E_1 \times E_2$ est donc une base de $E_1 \times E_2$, donc $\dim(E_1 \times E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2)$.

b) Cas général : Raisonnons par récurrence sur p . Nous venons de voir que la formule est vraie pour $p = 2$. Supposons-la vraie pour $p - 1$. Si on pose $F = E_1 \times \dots \times E_{p-1}$ on a

$$\dim(E_1 \times \dots \times E_{p-1} \times E_p) = \dim(F \times E_p) = \dim(F) + \dim(E_p).$$

Il suffit d'appliquer l'hypothèse de récurrence pour obtenir la formule annoncée.

8.2. Applications linéaires en dimension finie

8.2.1. DIMENSION DE $\mathcal{L}(E, F)$

8.2.1.1. Théorème

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie sur le même corps K . Alors $\mathcal{L}(E, F)$ est de dimension finie et on a :

$$\dim_K (\mathcal{L}(E, F)) = \dim_K(E) \cdot \dim_K(F).$$

Démonstration. Notons n la dimension de E et p la dimension de F . Soient $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $(f_1, \dots, f_p)$ une base de F .

Nous savons (Théorème 7.2.3.4) qu'une application linéaire est parfaitement déterminée par les images des vecteurs d'une base de l'espace de départ. On peut donc définir une famille de np application linéaires de E dans F , indexée par $\{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, p\}$ en posant :

$$u_{ij}(e_k) = \begin{cases} f_j & \text{si } k = i \\ 0 & \text{si } k \neq i \end{cases}$$

Montrons que la famille $(u_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ est une base de $\mathcal{L}(E, F)$.

a) La famille (u_{ij}) engendre $\mathcal{L}(E, F)$: soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Pour tout $x \in E$, on peut écrire de manière unique $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, et $u(e_i) = \sum_{j=1}^p a_{ij} f_j$ pour $1 \leq i \leq n$, où les a_{ij} sont des scalaires.

D'où

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{i=1}^n x_i u(e_i) = \sum_{i=1}^n x_i \left(\sum_{j=1}^p a_{ij} f_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_{ij} x_i f_j. \end{aligned}$$

Comme $u_{ij}(x) = \sum_{k=1}^n x_k u_{ij}(e_k) = x_i f_j$, on a pour tout vecteur $x \in E$:

$$u(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_{ij} u_{ij}(x),$$

c'est-à-dire

$$u = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_{ij} u_{ij}$$

et $(u_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ est une famille génératrice de $\mathcal{L}(E, F)$.

b) La famille (u_{ij}) est libre : soit (λ_{ij}) une famille de scalaires telle que

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p \lambda_{ij} u_{ij} = 0.$$

Alors, pour tout $x \in E$, on a

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p \lambda_{ij} u_{ij}(x) = 0.$$

En particulier, pour tout $k \in [1, n]$, on a

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p \lambda_{ij} u_{ij}(e_k) = 0,$$

ce qui donne, d'après la définition des u_{ij} : $\sum_{j=1}^p \lambda_{kj} f_j = 0$.

Comme $(f_j)_{1 \leq j \leq p}$ est une famille libre de F , on obtient $\lambda_{kj} = 0$ pour tout $k \in [1, n]$ et tout $j \in [1, p]$, donc $(u_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ est une famille libre de $\mathcal{L}(E, F)$.

La famille (u_{ij}) est donc une base de $\mathcal{L}(E, F)$. Comme elle comporte np éléments, le théorème est démontré. $\square$

8.2.1.2. Corollaire

Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie n . Alors l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$ des endomorphismes de E est de dimension finie n^2 .

C'est un cas particulier du Théorème 8.2.1.1 pour $E = F$.

8.2.2. ESPACES VECTORIELS ISOMORPHES

8.2.2.1. Théorème

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie sur le corps K . Alors E et F sont isomorphes si et seulement si $\dim_K(E) = \dim_K(F)$.

Démonstration. Supposons que E et F soient isomorphes. Par hypothèse, il existe une application linéaire bijective u de E sur F . Soit $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E ; alors $(u(e_i))_{1 \leq i \leq n}$ est une base de F (Théorème 7.2.3.3). Donc F et E ont même dimension.

Réciproquement, supposons que $\dim(E) = \dim(F) = n$. Soient (e_i) une base de E et (f_j) une base de F . Par hypothèse elles ont le même nombre d'éléments. Soit u l'application linéaire définie par $u(e_i) = f_i$ pour tout $i \in [1, n]$. D'après le Théorème 7.2.3.4, u est bijective, donc E et F sont isomorphes.

8.2.2.2. Corollaire

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps K . Alors E est isomorphe à K^n .

Il suffit d'appliquer le Théorème 8.2.2.1 en se souvenant que $\dim_K(K^n) = n$.

8.2.2.3. Corollaire

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps K et soit F un sous-espace vectoriel de E . Alors tout sous-espace supplémentaire de F dans E est isomorphe à l'espace quotient E/N .

En effet, si F_1 est un supplémentaire de F dans E , on sait (Théorèmes 8.1.3.1) et 8.1.3.2 que

$$\dim(E) = \dim(F) + \dim(F_1) = \dim(F) + \dim(E/F)$$

d'où $\dim(F_1) = \dim(E/F)$.

8.2.3. RANG D'UNE APPLICATION LINÉAIRE,
D'UNE FAMILLE DE VECTEURS

8.2.3.1. Définition

*Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie et F un K -espace vectoriel quelconque. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle **rang** de u , et on note $rg(u)$, la dimension sur K de $\text{Im}(u)$.*

Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E , les vecteurs $u(e_1), \dots, u(e_n)$ engendrent $\text{Im}(u)$. D'après le Théorème 8.1.2.7, il existe une base de $\text{Im}(u)$ comportant $rg(u)$ éléments. Ainsi le rang de u est le nombre maximum de vecteurs linéairement indépendants extraits de la suite $u(e_1), \dots, u(e_n)$. On a donc $rg(u) \leq n = \dim(E)$.

Plus généralement, nous poserons la définition suivante :

8.2.3.2. Définition

*On appelle **rang** d'une famille $\{x_1, \dots, x_n\}$ de vecteurs d'un K -espace vectoriel E de dimension finie ou non, la dimension du sous-espace vectoriel E' de E engendré par ces vecteurs, c'est-à-dire le nombre maximum de vecteurs linéairement indépendants que l'on peut extraire de la suite $(x_1, \dots, x_n)$.*

Le théorème suivant appelé **théorème noyau image** ou encore **théorème du rang** est d'un usage courant.

8.2.3.3. Théorème

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie, F un K -espace vectoriel quelconque, et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :

$$\dim(E) = \dim(\text{Ker}(u)) + \dim(\text{Im}(u)).$$

Démonstration. D'après le Théorème 8.1.3.1, $\text{Ker}(u)$ admet un sous-espace supplémentaire W dans E . Soit

$$v : W \longrightarrow \text{Im}(u)$$

la restriction de u à W . Il est clair que v est linéaire. Montrons qu'elle est bijective.

Par définition, si $x \in \text{Ker}(v)$, on a $u(x) = 0$, donc $x \in \text{Ker}(u)$, d'où $x \in W \cap \text{Ker}(u) = \{0\}$; donc $x = 0$. L'application v est donc injective.

Montrons que v est surjective. Soit $y \in \text{Im}(u)$. Il existe $x \in E$ tel que $u(x) = y$. Or x s'écrit de façon unique sous la forme :

$$x = x_1 + x_2 \text{ avec } x_1 \in \text{Ker}(u) \text{ et } x_2 \in W.$$

D'où, puisque $u(x_1) = 0$, $u(x) = u(x_1 + x_2) = u(x_1) + u(x_2) = u(x_2)$.

Par suite $y = u(x_2) = v(x_2)$, et v est une application linéaire surjective sur $\text{Im}(u)$.

On a ainsi démontré que tout supplémentaire de $\text{Ker}(u)$ est isomorphe à $\text{Im}(u)$. D'après le Théorème 8.2.2.1, W a même dimension que $\text{Im}(u)$. Comme $\dim(E) = \dim(W) + \dim(\text{Ker}(u))$, on a bien $\dim(E) = \dim(\text{Im}(u)) + \dim(\text{Ker}(u))$.

8.2.3.4. Corollaire

Soient E et F deux K -espaces vectoriels de dimension finie et soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :

- a) $\text{rg}(u) \leq \dim(E)$; $\text{rg}(u) = \dim(E)$ si et seulement si u est injective.
- b) $\text{rg}(u) \leq \dim(F)$; $\text{rg}(u) = \dim(F)$ si et seulement si u est surjective.

Démonstration. a) On a (Théorème du rang) :

$$\text{rg}(u) = \dim(E) - \dim(\text{Ker}(u)) \leq \dim(E).$$

$\text{rg}(u) = \dim(E)$ si et seulement si $\dim(\text{Ker}(u)) = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $\text{Ker}(u) = \{0\}$; donc $\text{rg}(u) = \dim(E)$ si et seulement si u est injective (Théorème 7.2.2.3).

b) De même $\text{rg}(u) = \dim(u(E)) \leq \dim(F)$ et $\text{rg}(u) = \dim(F)$ si et seulement si $\dim(u(E)) = \dim(F)$, c'est-à-dire $u(E) = F$. Finalement, $\text{rg}(u) = \dim(F)$ si et seulement si u est surjective.

8.2.3.5. Corollaire

Soient E et F deux K -espaces vectoriels de même dimension finie n et soit u une application linéaire de E dans F . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- a) u est un isomorphisme de E sur F .
- b) u est injective.

c) u est surjective.

d) u est de rang n .

Démonstration. Les conditions b) et d) sont équivalentes d'après le Corollaire 8.2.3.4 ; de même c) et d) sont équivalentes. Donc b), c) et d) sont équivalentes.

Il est clair que a) $\implies$ b).

Montrons que b) $\implies$ a). Supposons u injective ; alors $\text{Ker}(u) = \{0\}$, donc $\dim(\text{Ker}(u)) = 0$. D'après le Théorème 8.2.3.3, $\dim(\text{Im}(u)) = \dim(E) = \dim(F)$, d'où $\text{Im}(u) = F$ et u est surjective, donc bijective. $\square$

8.2.3.6. Remarque

La proposition précédente est très importante dans la pratique car elle permet d'affirmer (en particulier) qu'un endomorphisme est bijectif dès qu'on sait qu'il est injectif ou surjectif. Mais ce n'est plus vrai en dimension infinie. Ainsi l'application linéaire $D : K[X] \longrightarrow K[X]$ qui, à tout polynôme, associe sa dérivée est surjective mais non injective.

8.2.3.7. Corollaire

Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels d'un K -espace vectoriel E de dimension finie. On a

$$\dim(E_1 + E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2) - \dim(E_1 \cap E_2).$$

Démonstration. Considérons l'application $u : E_1 \times E_2 \longrightarrow E$ définie par

$$u(x_1, x_2) = x_1 + x_2, \quad x_1 \in E_1, \quad x_2 \in E_2.$$

Elle est évidemment linéaire et $\text{Im}(u) = E_1 + E_2$ par définition de la somme de deux sous-espaces vectoriels. D'autre part :

$$\begin{aligned} \text{Ker}(u) &= \{(x, y) \in E_1 \times E_2 : x + y = 0\} \\ &= \{(x, -x) : x \in E_1 \cap E_2\}. \end{aligned}$$

L'application $x \longmapsto (x, -x)$ de $E_1 \cap E_2$ sur $\text{Ker}(u)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels (pourquoi ?), d'où $\dim(\text{Ker}(u)) = \dim(E_1 \cap E_2)$. Alors, d'après le Théorème 8.1.3.5 et le Théorème 8.2.3.3 appliqué à u , on a

$$\begin{aligned} \dim(E_1) + \dim(E_2) &= \dim(E_1 \times E_2) \\ &= \dim(\text{Ker}(u)) + \dim(\text{Im}(u)) \\ &= \dim(E_1 \cap E_2) + \dim(E_1 + E_2), \end{aligned}$$

d'où notre assertion. $\square$

8.3. Dualité

8.3.1. DUAL D'UN ESPACE VECTORIEL

Rappelons qu'une forme linéaire sur un K -espace vectoriel E est une application linéaire de E dans K .

D'après le Théorème 7.3.2.2, l'ensemble $\mathcal{L}(E, K)$ des formes linéaires sur E est un espace vectoriel. On l'appelle l'espace vectoriel dual ou simplement le dual de E et on le note E^* .

8.3.1.1. Notation

Si $x \in E$ et $u \in E^*$, posons $u(x) = \langle u, x \rangle$. Alors, comme u est linéaire et E^* est un espace vectoriel, on a

$$\begin{aligned} \langle u, x + y \rangle &= \langle u, x \rangle + \langle u, y \rangle \\ (8.3.1.1) \quad \langle u, \lambda x \rangle &= \lambda \langle u, x \rangle \\ \langle u + v, x \rangle &= \langle u, x \rangle + \langle v, x \rangle \\ \langle \lambda u, x \rangle &= \lambda \langle u, x \rangle. \end{aligned}$$

quels que soient $u, v \in E^*$, $x, y \in E$ et $\lambda \in K$.

8.3.1.2. Exemple

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles. En posant

$$u(f) = \int_a^b f(x) dx$$

pour toute $f \in E$, on obtient une forme linéaire sur E .

Si E est un K -espace vectoriel de dimension finie, le Théorème 8.2.1.1 montre que E^* est de dimension finie égale à la dimension de E puisque $\dim_K(K) = 1$. Nous allons construire une base de E^* .

Supposons E de dimension finie n et soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Donnons-nous n scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ quelconques ; d'après le Théorème 7.2.3.4, il existe une forme linéaire u et une seule telle que

$$u(e_1) = \alpha_1, u(e_2) = \alpha_2, \dots, u(e_n) = \alpha_n.$$

On peut donc définir n formes linéaires $e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*$ en posant

$$\langle e_i^*, e_j \rangle = 1 \text{ si } i = j \text{ et } \langle e_i^*, e_j \rangle = 0 \text{ si } i \neq j$$

c'est-à-dire $\langle e_i^*, e_j \rangle = \delta_{ij}$ où le symbole δ_{ij} appelé symbole de Kronecker est défini par

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

8.3.1.3. Théorème

Soit E un K -espace vectoriel de dimension n et soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Les n formes linéaires $e_1^*, \dots, e_n^*$ de E^* définie par $\langle e_i^*, e_j \rangle = \delta_{ij}$ forment une base de E^* , donc E^* est de dimension n .

Démonstration. a) Les e_i^* engendrent E^* . Soit u une forme linéaire quelconque. Il existe n scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ tels que

$$u(e_1) = \alpha_1, u(e_2) = \alpha_2, \dots, u(e_n) = \alpha_n.$$

Alors pour tout $x = \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j \in E$, on a

$$u(x) = \lambda_1 u(e_1) + \dots + \lambda_n u(e_n) = \lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_n \alpha_n.$$

Or par définition de e_i^* , on a :

$$e_i^*(x) = \sum_{j=1}^n \lambda_j e_i^*(e_j) = \lambda_i,$$

donc

$$u(x) = \alpha_1 e_1^*(x) + \dots + \alpha_n e_n^*(x) = (\alpha_1 e_1^* + \dots + \alpha_n e_n^*)(x)$$

et par suite

$$u = \alpha_1 e_1^* + \dots + \alpha_n e_n^*$$

ce qui montre que les e_i^* engendrent E^* .

b) Les e_i^* sont linéairement indépendantes dans E^* .

Soit $(a_1, \dots, a_n)$ une suite de scalaires tels que :

$$a_1 e_1^* + a_2 e_2^* + \dots + a_n e_n^* = 0.$$

Alors pour tout $x \in E$, on a

$$a_1 e_1^*(x) + a_2 e_2^*(x) + \dots + a_n e_n^*(x) = 0.$$

En particulier pour chaque $j \in [1, n]$ nous aurons

$$\sum_{i=1}^n a_i e_i^*(e_j) = \sum_{i=1}^n a_i \delta_{ij} = a_j = 0,$$

d'où $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$.

Ainsi la relation $a_1 e_1^* + \dots + a_n e_n^* = 0$ entraîne $a_1 = \dots = a_n = 0$ et la famille $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ est libre. Elle forme donc une base de E^* .

8.3.1.4. Définition

La base $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ de E^* associée à la base $(e_1, \dots, e_n)$ de E s'appelle la **base duale** de la base $(e_1, \dots, e_n)$ de E .

8.3.1.5. Remarques

a) Si $x = \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j \in E$, on a

$$e_i^*(x) = \sum_{j=1}^n \lambda_j e_i^*(e_j) = \lambda_i.$$

Pour cette raison, on dit que e_i^* est la $i^{\text{ème}}$ **forme coordonnée** relative à la base $(e_1, \dots, e_n)$.

b) Si $u \in E^*$, alors $u = \alpha_1 e_1^* + \dots + \alpha_n e_n^*$, où $\alpha_i = \langle u, e_i \rangle$.

c) $\langle u, x \rangle = 0$ pour tout $u \in E^*$ $\iff x = 0$.

En effet, l'hypothèse montre que $\langle e_i^*, x \rangle = 0$ pour tout indice $i \in \{1, 2, \dots, n\} \iff$ (les coordonnées de x sont nulles).

8.3.2. BIDUAL D'UN ESPACE VECTORIEL

8.3.2.1. Définition

Soit E un K -espace vectoriel. On appelle **bidual** de E et on note E^{**} l'espace vectoriel dual de E^* .

Si E est de dimension finie, on a d'après le Théorème 8.3.1.3.

$$\dim(E^{**}) = \dim(E^*) = \dim(E).$$

Nous allons définir une application de E dans E^{**} de la manière suivante : soit $x \in E$; à tout $u \in E^*$ associons sa valeur au point x . On définit ainsi une application T_x de E^* dans K et d'après les formules (8.3.1.1), T_x est une forme linéaire sur E^* , autrement dit $T_x \in E^{**}$.

Posons

$$J(x) = T_x \text{ et } \langle u, J(x) \rangle = \langle u, x \rangle.$$

D'après les formules (8.3.1.1), l'application $J : E \longrightarrow E^{**}$ est linéaire. On l'appelle le **morphisme canonique** de E dans E^{**} .

Nous allons montrer que si E est de dimension finie, alors le morphisme canonique est un isomorphisme.

8.3.2.2. Théorème

Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie n . Alors le morphisme canonique $x \mapsto T_x$ de E dans E^{**} est un isomorphisme.

Démonstration. Nous savons déjà que $\dim(E) = \dim(E^{**})$. Il suffit donc, d'après le Corollaire 8.2.3.5, de montrer que J est injectif. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} x \in \text{Ker}(J) &\iff J(x) = 0 \iff \langle u, J(x) \rangle = 0 \text{ pour tout } u \in E^* \\ &\iff \langle u, x \rangle = 0 \text{ pour tout } u \in E^* \iff x = 0. \end{aligned}$$

La dernière équivalence logique résulte des Remarques 8.3.1.5.

Ainsi J est injective, donc bijective.

En général, on identifie un espace vectoriel E de dimension finie à son bidual E^{**} à l'aide de l'isomorphisme J . On identifie le vecteur x et la forme linéaire T_x définie à partir de x . Ainsi x peut être considérée comme une forme linéaire sur E^* , ce qui permet d'écrire indifféremment :

$$u(x) = \langle u, x \rangle = \langle x, u \rangle.$$

Ainsi un espace vectoriel de dimension finie et son bidual jouent des rôles parfaitement symétriques.

8.3.2.3. Remarque

Si E n'est pas de dimension finie, on démontre que le morphisme canonique est toujours injectif, mais pas nécessairement surjectif et E est seulement un sous-espace vectoriel de E^{**} .

8.3.3. ORTHOGONALITÉ

8.3.3.1. Définition

Soient E un K -espace vectoriel, $x \in E$ et $u \in E^*$. On dit que u et x sont orthogonaux si $\langle u, x \rangle = 0$.

On dit qu'une partie A de E est orthogonale à une partie B de E^* si tout élément de A est orthogonal à tout élément de B .

Si A est une partie de E , on appelle **orthogonal de A dans E^*** , et on note A° , l'ensemble des formes linéaires u sur E qui vérifient $\langle u, x \rangle = 0$ pour tout $x \in A$.

De même si B est une partie de E^* , l'orthogonal de B est l'ensemble

$$(8.3.3.1) \quad B_1 = \{x \in E : \langle u, x \rangle = 0 \text{ pour tout } u \in B\}.$$

Les formules (8.3.1.1) montrent immédiatement que pour toute partie A de E , l'ensemble A° est un sous-espace vectoriel de E^* et pour toute partie B de E^* , l'ensemble B_1 est un sous-espace vectoriel de E .

8.3.3.2. Définition

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie n . On appelle **hyperplan vectoriel** de E tout sous-espace de dimension $(n - 1)$.

Le théorème suivant donne une caractérisation des hyperplans à l'aide des formes linéaires.

8.3.3.3. Théorème

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie n et soit u une forme linéaire non nulle sur E . Alors le noyau de u est un hyperplan vectoriel de E . Réciproquement, si H est un hyperplan vectoriel de E , il existe une forme linéaire non nulle u dont le noyau est H , et toute forme linéaire v dont le noyau est H est proportionnelle à u .

Démonstration. Le sous-espace vectoriel $\text{Im}(u)$ de K est de dimension 1. D'après le Théorème 8.2.3.3, $\dim(\text{Ker}(u)) = n - 1$, donc $\text{Ker}(u)$ est un hyperplan.

Réciproquement, soit H un hyperplan vectoriel de E et soit $(e_1, \dots, e_{n-1})$ une base de H que nous complétons en une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E . Considérons la forme linéaire u définie par

$$\begin{aligned} u(e_i) &= 0 \text{ pour } i = 1, 2, \dots, n-1 \\ u(e_n) &= 1. \end{aligned}$$

Il est clair que $\text{Ker}(u) = H$. Si v est une forme linéaire telle que $\text{Ker}(v) = H$, posons $\alpha = v(e_n)$ et considérons la forme linéaire $v - \alpha u$. α est non nul puisque $H \neq E$.

On a d'une part $(v - \alpha u)(e_n) = 0$ et, d'autre part $(v - \alpha u)(e_i) = 0$ pour $i = 1, \dots, n-1$.

Donc $v - \alpha u = 0$, soit $v = \alpha u$.

8.3.3.4. Théorème

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie n , F un sous-espace vectoriel de dimension m . Alors :

a) F° est de dimension $n - m$; autrement dit :

$$\dim(F) + \dim(F^\circ) = \dim(E) ;$$

b) $(F^\circ)^\circ = F$.

Démonstration. a) Soit $(e_1, \dots, e_m)$ une base de F . D'après le théorème de la base incomplète, il existe des vecteurs $e_{m+1}, \dots, e_n$ de E tels que $(e_1, \dots, e_n)$ soit une base de E . Soit $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ la base duale de E^* .

Pour qu'un vecteur $f = \alpha_1 e_1^* + \dots + \alpha_n e_n^*$ de E^* soit orthogonal à F , il faut et il suffit que pour tout $x \in F$, on ait $f(x) = 0$, et en particulier $f(e_i) = 0$ pour $i = 1, 2, \dots, m$. Comme $f(e_i) = \alpha_i$, on voit que $f = \alpha_{m+1} e_{m+1}^* + \dots + \alpha_n e_n^*$. Réciproquement, tout élément f de E^* de la forme précédente vérifie $f(x) = 0$ pour tout $x \in F$, donc est dans F° . Donc F° admet pour base $(e_{m+1}^*, \dots, e_n^*)$, d'où le a).

b) Soit x un élément de F ; x est orthogonal à F° , donc $x \in (F^\circ)^\circ$, et par suite $F \subset (F^\circ)^\circ$. D'après le a), on a $\dim [(F^\circ)^\circ] = n - (n - m) = m = \dim(F)$. Le Théorème 8.1.3.1, b), appliqué à F et $(F^\circ)^\circ$ montre alors que $F = (F^\circ)^\circ$.

8.3.4. TRANSPOSÉE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE

Soient E et F deux K -espaces vectoriels, et u une application linéaire de E dans F . Nous nous proposons de définir une application linéaire de F^* dans E^* . Pour cela, considérons une forme linéaire y' sur F . Alors l'application composée $y' \circ u$ est une forme linéaire sur E , c'est-à-dire un élément de E^* .

Ainsi, étant donnée une application linéaire u de E dans F , à tout élément y' de F^* il correspond un élément $y' \circ u$ de E^* . On peut donc définir une application ${}^t u : F^* \longrightarrow E^*$ en posant

$${}^t u(y') = y' \circ u \quad \text{quel que soit } y' \in F^*.$$

8.3.4.1. Définition

Soient E et F deux K -espaces vectoriels E^* et F^* leurs espaces duaux et $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire. On appelle **transposée** de u , et on note ${}^t u$, l'application linéaire ${}^t u : F^* \longrightarrow E^*$ définie par ${}^t u(y') = y' \circ u$ pour tout $y' \in F^*$.

On a par définition

$$({}^t u(y'))(x) = (y' \circ u)(x) = y'(u(x))$$

pour tout $x \in E$, ou encore

$$(8.3.4.1) \quad \langle {}^t u(y'), x \rangle = \langle y', u(x) \rangle$$

quels que soient $x \in E$ et $y' \in F^*$.

La formule (8.3.4.1) s'appelle la **formule fondamentale de la transposition**.

Montrons que l'application ${}^t u$ est linéaire. Soient $y'_1, y'_2 \in F^*$. Pour tout $x \in E$, on a

$$\langle {}^t u(y'_1 + y'_2), x \rangle = \langle y'_1 + y'_2, u(x) \rangle;$$

d'après (8.3.4.1) on obtient

$$\begin{aligned} \langle y'_1 + y'_2, u(x) \rangle &= \langle y'_1, u(x) \rangle + \langle y'_2, u(x) \rangle \\ &= \langle {}^t u(y'_1), x \rangle + \langle {}^t u(y'_2), x \rangle = \langle {}^t u(y'_1) + {}^t u(y'_2), x \rangle. \end{aligned}$$

D'où

$${}^t u(y'_1 + y'_2) = {}^t u(y'_1) + {}^t u(y'_2).$$

On vérifierait de même que ${}^t u(\lambda y') = \lambda {}^t u(y')$ pour tout $y' \in F^*$ et pour tout $\lambda \in K$.

8.3.4.2. Théorème

L'application $u \mapsto {}^t u$ possède les propriétés suivantes :

a) Soient E, F deux K -espaces vectoriels, $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\lambda \in K$; on a

$${}^t(u + v) = {}^t u + {}^t v ; {}^t(\lambda u) = \lambda {}^t u.$$

b) Si E et F sont de dimension finie, et si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ on a ${}^t({}^t u) = u$.

c) Soient E, F, G trois K -espaces vectoriels, $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$. On a ${}^t(vou) = {}^t u {}^t v$.

d) Soit E un K -espace vectoriel et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si u est un automorphisme de E , ${}^t u$ est aussi un automorphisme de E^* et $({}^t u)^{-1} = {}^t(u^{-1})$. La transposée de l'application identique de E est l'application identique de E^* .

Démonstration.

a) Pour tout $y' \in F^*$ et pour tout $x \in E$, on a

$$\begin{aligned} \langle {}^t(u + v)(y'), x \rangle &= \langle y', (u + v)(x) \rangle = \langle y', u(x) + v(x) \rangle \\ &= \langle y', u(x) \rangle + \langle y', v(x) \rangle \\ &= \langle {}^t u(y'), x \rangle + \langle {}^t v(y'), x \rangle \\ &= \langle ({}^t u + {}^t v)(y'), x \rangle, \end{aligned}$$

d'où

$${}^t(u + v)(y') = ({}^t u + {}^t v)(y')$$

et par suite

$${}^t(u + v) = {}^t u + {}^t v.$$

On vérifie de même que ${}^t(\lambda u) = \lambda {}^t u$.

b) Puisque $u \in \mathcal{L}(E, F)$, on a ${}^t u \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$, donc ${}^t({}^t u) \in \mathcal{L}(E^{**}, F^{**})$.

Soient donc $x \in E^{**} = E$ et $y' \in F^*$. On a

$$\langle {}^t({}^t u)(x), y' \rangle = \langle x, {}^t u(y') \rangle = \langle u(x), y' \rangle,$$

d'où ${}^t({}^t u)(x) = u(x)$ pour tout $x \in E$ et par suite ${}^t({}^t u) = u$.

c) Soient $x \in E$ et $z' \in G^*$. On a, en appliquant la formule (8.3.4.1),

$$\begin{aligned} \langle {}^t(vou)(z'), x \rangle &= \langle z', v(u(x)) \rangle = \langle {}^t v(z'), u(x) \rangle \\ &= \langle {}^t u({}^t v(z')), x \rangle, \end{aligned}$$

d'où ${}^t(vou)(z') = {}^t u({}^t v(z'))$ et par suite ${}^t(vou) = {}^t u {}^t v$.

d) Pour établir (iv) montrons d'abord que si u est l'application identique de E , alors ${}^t u$ est l'application identique de E^* . En effet, pour toute forme linéaire y' sur E et pour tout $x \in E$, on a

$$\langle {}^t u(y'), x \rangle = \langle y', u(x) \rangle = \langle y', x \rangle,$$

d'où ${}^t u(y') = \text{Id}_{E^*}(y')$ et par suite ${}^t u = \text{Id}_{E^*}$.

Si maintenant u est un automorphisme de E , soit u^{-1} l'automorphisme réciproque. On a $u \circ u^{-1} = u^{-1} \circ u = \text{Id}_E$.

On en déduit, en appliquant c) :

$${}^t(u^{-1}) \circ {}^t u = {}^t u \circ {}^t(u^{-1}) = {}^t(\text{Id}_E) = \text{Id}_{E^*},$$

ce qui montre que ${}^t u$ est bien un automorphisme de E^* et que $({}^t u)^{-1} = {}^t(u^{-1})$.

8.3.4.3. Théorème

Soient E et F deux K -espaces vectoriels de dimension finie, $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire et ${}^t u$ sa transposée. Alors :

a) Le noyau de ${}^t u$ est égal à l'orthogonal de $u(E)$ dans F^* .

b) Le noyau de u est égal à l'orthogonal de ${}^t u(F^*)$ dans E .

c) Le rang de u est égal au rang de ${}^t u$.

Démonstration. a) Soit $y' \in F^*$. On a les équivalences logiques suivantes :

$$\begin{aligned} y' \in \text{Ker}({}^t u) &\iff {}^t u(y') = 0 \iff \langle {}^t u(y'), x \rangle = 0 \text{ pour tout } x \in E \\ &\iff \langle y', u(x) \rangle = 0 \text{ pour tout } x \in E \iff y' \in (u(E))^\circ. \end{aligned}$$

Donc

$$\text{Ker}({}^t u) = (u(E))^\circ.$$

L'assertion b) se démontre de la même manière.

Démontrons c). On sait (Théorème 8.2.3.3), que

$$\text{rg}(u) = \dim(E) - \dim(\text{Ker}(u)).$$

Comme $\dim(E) = \dim(E^*)$ et $\text{Ker}(u) = ({}^t u(F^*))^\circ$, il vient, en appliquant le Théorème 8.3.3.4,

$$\text{rg}(u) = \dim(E^*) - \dim(({}^t u(F^*))^\circ) = \dim({}^t u(F^*)) = \text{rg}({}^t u).$$

Chapitre 9 : MATRICES

Si E et F sont des K -espaces vectoriels de dimension finie, il résulte de la linéarité, qu'une application linéaire u de E dans F est entièrement définie par la donnée des images par u des vecteurs d'une base B de E .

Si E et F sont munis de bases B et C respectivement, on est ainsi conduit à la notion de matrice d'une application linéaire relativement aux bases B et C . Alors la structure de l'ensemble des applications linéaires de E dans F détermine les opérations sur les matrices : addition, multiplication par un scalaire, et multiplication. En particulier, nous obtiendrons l'algèbre des matrices carrées associé à l'algèbre des endomorphismes d'un K -espace vectoriel E .

Ce chapitre est essentiel non seulement pour la suite du cours, mais également pour les applications aux autres sciences.

Dans tout ce chapitre, on désigne par K un corps commutatif quelconque.

9.1. Généralités

9.1.0.1. Définition

Soit K un corps commutatif. On appelle **matrice à m lignes et n colonnes** ou **matrice de type (m, n) à coefficients dans K** , un tableau rectangulaire d'éléments de K de la forme

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Les a_{ij} s'appellent les **éléments** de la matrice ; l'élément a_{ij} est situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne de M . On note souvent

$$M = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$$

ou simplement $M = (a_{ij})$ s'il n'y a pas de confusion possible.

Si $K = \mathbb{R}$, on dit que la matrice M est **réelle** ; si $K = \mathbb{C}$, elle est dite **complexe**.

Si $m = n$, on dit que M est une **matrice carrée d'ordre n** ; les éléments $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ forment alors la **diagonale principale** de la matrice.

Si $n = 1$, on obtient la **matrice colonne** :

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

Si $m = 1$, on obtient la **matrice ligne** :

$$M = (a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n}).$$

Si $M = (a_{ij})$ est une matrice de type (m, n) on appelle **transposée** de M , et on note tM , la matrice ${}^tM = (b_{ij})$ de type (n, m) définie par $b_{ij} = a_{ji}$.

tM est obtenue en permutant les lignes et les colonnes de M . On a : ${}^t({}^tM) = M$.

Une matrice carrée $M = (a_{ij})$ est dite **symétrique** si $a_{ij} = a_{ji}$ quels que soient i et j , c'est-à-dire si $M = {}^tM$.

Une matrice carrée $M = (a_{ij})$ est dite **antisymétrique** si ${}^tM = -M$.

La relation ${}^tM = -M$ implique $a_{ji} = -a_{ij}$, d'où $a_{ii} = -a_{ii}$ et par suite $a_{ii} = 0$ si le corps K est de caractéristique $\neq 2$.

Si $M = (a_{ij})$ est une matrice complexe de type (m, n) la matrice $\overline{M} = (\overline{a_{ij}})$ est appelée la **matrice conjuguée** de M , $\overline{a_{ij}}$ étant le nombre complexe conjugué de a_{ij} . On appelle **adjointe** de M , et on note M^* , la matrice $M^* = {}^t(\overline{M}) = \overline{{}^tM}$. Si M est une matrice carrée et si $M^* = M$, on dit que M est **hermitienne**.

On dit qu'une matrice carrée $M = (a_{ij})$ est **triangulaire supérieure** si les éléments situés au-dessous de la diagonale principale sont nuls, c'est-à-dire si $a_{ij} = 0$ pour $i > j$. On définit de même une matrice **triangulaire inférieure**.

Une matrice **diagonale** est une matrice carrée $M = (a_{ij})$ telle que $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$. Si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ désignent les éléments diagonaux d'une matrice diagonale D , nous écrirons

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

On appelle **matrice scalaire** une matrice diagonale dont tous les éléments de la diagonale principale sont égaux.

On appelle **matrice unité d'ordre n** , et on note I_n , la matrice scalaire d'ordre n dont les éléments de la diagonale principale sont égaux à un.

9.1.0.2. Exemple

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ces quelques définitions montrent déjà l'importance des matrices carrées.

L'ensemble des matrices de type (m, n) à coefficients dans le corps K se note $M_{m,n}(K)$ et l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans K se note $M_n(K)$.

9.2. Matrice d'une application linéaire

9.2.1. DÉFINITIONS, EXEMPLES ET THÉORÈMES

9.2.1.1. Définition

Soient E et F deux K -espaces vectoriels de dimension n et m respectivement, $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E , $C = (f_1, \dots, f_m)$ une base de F et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle **matrice de u par rapport aux bases B et C** , et on note $\text{Mat}_{B,C}(u)$, la matrice (a_{ij}) de type (m, n) dont la $j^{\text{ème}}$ colonne est constituée par les coordonnées du vecteur $u(e_j)$ par rapport à la base $(f_1, \dots, f_m)$.

On a donc

$$(9.2.1.1) \quad u(e_j) = a_{1j}f_1 + a_{2j}f_2 + \dots + a_{mj}f_m.$$

Si $E = F$ et si $B = C$, on écrit $\text{Mat}_{B,B}(u) = \text{Mat}_B(u)$, et on dit que $\text{Mat}_B(u)$ est la **matrice de l'endomorphisme u par rapport à la base B** .

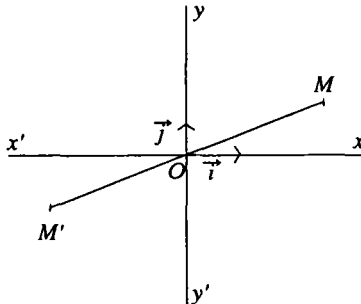
On notera que $\text{Mat}_{B,C}(u)$ dépend en général de B et C même lorsque $B = C$.

9.2.1.2. Remarque

Le nombre de lignes de la matrice de l'application linéaire $u : E \longrightarrow F$ est égale à la dimension de F ; le nombre de ses colonnes est égal à la dimension de E .

9.2.1.3. Exemple

Dans le plan rapporté à des axes rectangulaires, soient $\vec{i} = (1, 0)$ et $\vec{j} = (0, 1)$ la base canonique. Cherchons la matrice de la symétrie u par rapport à O .



On a $u(\vec{i}) = -\vec{i} = (-1, 0)$; $u(\vec{j}) = -\vec{j} = (0, -1)$.

La matrice M de u dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est donc :

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

9.2.1.4. Théorème

Soient E et F deux K -espaces vectoriels de dimension n et m respectivement, $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E , $C = (f_1, \dots, f_m)$ une base de F . L'application qui, à tout $u \in \mathcal{L}(E, F)$, fait correspondre sa matrice $\text{Mat}_{B,C}(u)$ par rapport aux bases B et C est une application bijective de $\mathcal{L}(E, F)$ sur l'ensemble $M_{m,n}(K)$ des matrices de type (m, n) .

Démonstration. Si u et u' sont deux éléments de $\mathcal{L}(E, F)$ tels que $\text{Mat}_{B,C}(u) = \text{Mat}_{B,C}(u')$, alors on a pour tout indice j , $u(e_j) = u'(e_j)$ et donc par linéarité $u(x) = u'(x)$ pour tout $x \in E$, i.e. $u = u'$ et l'application est injective.

Soit $M = (a_{ij})$ une matrice de type (m, n) à coefficients dans K ; considérons les n vecteurs y_j de F :

$$y_j = a_{1j}f_1 + a_{2j}f_2 + \dots + a_{mj}f_m, \quad 1 \leq j \leq n.$$

On sait (Théorème 7.2.3.4), qu'il existe une application linéaire unique $u : E \rightarrow F$ telle que $u(e_j) = y_j$ pour tout indice j , donc telle que $\text{Mat}_{B,C}(u) = M$; donc l'application $u \mapsto \text{Mat}_{B,C}(u)$ est surjective, ce qui achève la démonstration du théorème.

D'après ce théorème, toute matrice M de type (m, n) peut être considérée comme la matrice d'une unique application linéaire u_M de K^n dans K^m relativement aux bases canoniques de ces espaces. On dit que u_M est l'application linéaire associée à M . On peut donc définir l'image, le noyau et le rang de M comme étant respectivement l'image, le noyau et le rang de u_M . En particulier, l'image de u_M est le sous-espace vectoriel de K^m engendré par les images des éléments de la base canonique de K^n , c'est-à-dire par les colonnes de M . Ces remarques nous permettent de définir le rang de M comme étant la dimension du sous-espace vectoriel de K^m engendré par les n colonnes de M ; c'est aussi le nombre de colonnes de M qui sont linéairement indépendantes.

Nous verrons plus tard comment calculer le rang de M .

9.2.1.5. Théorème

Soient E et F deux K -espaces vectoriels de dimension n et m respectivement, $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E , $(f_1, \dots, f_m)$ une base de F , et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors le rang de u est égal au rang de la matrice de u par rapport aux bases $(e_1, \dots, e_n)$ et $(f_1, \dots, f_m)$.

Démonstration. Soit $A = (a_{ij})$ la matrice de u par rapport aux bases $(e_1, \dots, e_n)$ et $(f_1, \dots, f_m)$. Il s'agit de comparer $\text{rg}(A)$ et $\text{rg}(u)$.

Soient $(e'_1, \dots, e'_n)$ la base canonique de K^n , $(f'_1, \dots, f'_m)$ la base canonique de K^m et u_A l'application linéaire de K^n dans K^m associée à A . Soit φ l'unique isomorphisme de E sur K^n défini par $\varphi(e_j) = e'_j$ pour $1 \leq j \leq n$ et soit ψ l'unique isomorphisme de F sur K^m défini par $\psi(f_i) = f'_i$ pour $1 \leq i \leq m$.

Montrons d'abord que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{u} & F \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \psi \\ K^n & \xrightarrow{u_A} & K^m \end{array}$$

est commutatif.

Pour tout $j \in [1, n]$, on a

$$\begin{aligned} (\psi \circ u)(e_j) &= \psi(u(e_j)) = \psi\left(\sum_{i=1}^m a_{ij} f_i\right) = \sum_{i=1}^m a_{ij} \psi(f_i) = \sum_{i=1}^m a_{ij} f'_i \\ &= u_A(e'_j) = u_A(\varphi(e_j)) = (u_A \circ \varphi)(e_j). \end{aligned}$$

Par linéarité, on en déduit que $\psi \circ u = u_A \circ \varphi$. D'où

$$\text{rg}(\psi \circ u) = \text{rg}(u_A \circ \varphi),$$

soit

$$\dim(\psi(u(E))) = \dim(u_A(\varphi(E)))$$

ou, puisque φ et ψ sont bijectives,

$$\dim(u(E)) = \dim(u_A(K^n)).$$

Par suite, on a $\text{rg}(u) = \text{rg}(u_A) = \text{rg}(A)$.

9.2.1.6. Théorème

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie n , $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $\{x_1, \dots, x_p\}$ une famille de p vecteurs de E définie par

$$x_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i \quad (1 \leq j \leq p).$$

Alors le rang de la famille $\{x_1, \dots, x_p\}$ est égal au rang de la matrice $M = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$.

Démonstration. Soit u l'application linéaire de K^p dans E qui envoie les éléments $(e'_1, \dots, e'_p)$ de la base canonique de K^p sur les vecteurs x_i donnés :

$$u(e'_j) = x_j \quad (1 \leq j \leq p).$$

La matrice de l'application linéaire u par rapport aux bases $(e'_1, \dots, e'_p)$ et $(e_1, \dots, e_n)$ est justement $M = (a_{ij})$ et d'après le Théorème 9.2.1.4, on a $rg(u) = rg(M)$.

Or, le rang de la famille $\{x_1, \dots, x_p\}$ est la dimension du sous-espace vectoriel engendré par cette famille et d'après la construction de u , ce sous-espace est identique à $\text{Im}(u)$. Donc le rang de la famille $\{x_1, \dots, x_p\}$ est égal au rang de u , c'est-à-dire au rang de la matrice M .

9.2.1.7. Théorème

Conservons les notations du Théorème 9.2.1.4. Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $M = (a_{ij})$ la matrice de u par rapport aux bases $(e_1, \dots, e_n)$ et $(f_1, \dots, f_m)$. Alors si x est un vecteur de E défini par ses coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ par rapport à la base $(e_1, \dots, e_n)$ les coordonnées $(y_1, \dots, y_m)$ de $y = u(x)$ par rapport à la base $(f_1, \dots, f_m)$ sont données par les formules

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ y_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n. \end{aligned}$$

Démonstration. On a

$$y = u(x) = u \left(\sum_{j=1}^n x_j e_j \right) = \sum_{j=1}^n x_j u(e_j).$$

D'après la formule (9.2.1.1), cette expression vaut

$$\sum_{j=1}^n x_j \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} f_i \right).$$

En regroupant les termes par rapport aux f_i , il vient :

$$y = (a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n)f_1 + \dots + (a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n)f_m.$$

D'où

$$y_i = a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n$$

pour tout $i \in [1, m]$.

9.2.1.8. Théorème

Soient E et F deux K -espaces vectoriels, $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E , $(f_1, \dots, f_m)$ une base de F , $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ et $(f_1^*, \dots, f_m^*)$ les bases de E^* et F^* respectivement duales des bases données. Alors si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et si A est la matrice de u par rapport aux bases $(e_1, \dots, e_n)$ et $(f_1, \dots, f_m)$, la matrice de la transposée ${}^t u$ par rapport aux bases $(f_1^*, \dots, f_m^*)$ et $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ est ${}^t A$.

Démonstration. Posons $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$. On a

$$u(e_j) = \sum_{k=1}^m a_{kj} f_k.$$

Par définition de la base duale $(f_1^*, \dots, f_m^*)$, on a

$$\langle f_i^*, f_j \rangle = \delta_{ij} \quad (1 \leq i, j \leq m).$$

Donc

$$\langle f_i^*, u(e_j) \rangle = a_{ij}.$$

Soit (b_{ij}) la matrice de ${}^t u \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$ par rapport aux bases $(f_1^*, \dots, f_m^*)$ et $(e_1^*, \dots, e_n^*)$. On a

$${}^t u(f_j^*) = \sum_{k=1}^n b_{kj} e_k^*.$$

D'où, puisque $\langle e_k^*, e_j \rangle = \delta_{kj}$,

$$\langle {}^t u(f_j^*), e_i \rangle = b_{ij}.$$

Comme

$$\langle {}^t u(f_j^*), e_i \rangle = \langle f_j^*, u(e_i) \rangle,$$

d'après la formule (8.3.4.1), on a bien $b_{ij} = a_{ji}$.

9.2.1.9. Remarque

D'après le Théorème 8.3.4.3, toute matrice A de type (m, n) a même rang r que sa transposée ${}^t A$ et r est aussi le nombre maximal de lignes de A linéairement indépendantes.

9.3. Opérations sur les matrices

Nous définirons les opérations sur les matrices à partir des opérations correspondantes sur les applications linéaires.

Soient E et F deux espaces vectoriels sur K , $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E , $(f_1, \dots, f_m)$ une base de F , u et v des éléments de $\mathcal{L}(E, F)$. Soient $M(u)$ et $M(v)$ les matrices de u et v respectivement par rapport aux bases $(e_1, \dots, e_n)$ et $(f_1, \dots, f_m)$.

9.3.1. ÉGALITÉ DE DEUX MATRICES

Les deux applications linéaires u et v sont égales si et seulement si $u(e_j) = v(e_j)$ pour tout $j \in [1, n]$, c'est-à-dire

$$a_{1j}f_1 + a_{2j}f_2 + \dots + a_{mj}f_m = b_{1j}f_1 + b_{2j}f_2 + \dots + b_{mj}f_m.$$

Donc $u = v$ si et seulement si $a_{ij} = b_{ij}$, pour $i = 1, \dots, n$ et $j = 1, \dots, m$, ce qui nous conduit à la définition suivante :

9.3.1.1. Définition

On dit que deux matrices $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ de type (m, n) sont égales si on a

$$a_{ij} = b_{ij}$$

quels que soient i et j .

9.3.2. ADDITION DES MATRICES

Conservons les notations précédentes et notons $S = (s_{ij})$ la matrice de l'application linéaire $u + v$. On a

$$\begin{aligned}(u + v)(e_j) &= u(e_j) + v(e_j) = a_{1j}f_1 + \dots + a_{mj}f_m + b_{1j}f_1 + \dots + b_{mj}f_m \\ &= (a_{1j} + b_{1j})f_1 + \dots + (a_{mj} + b_{mj})f_m.\end{aligned}$$

D'où

$$s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

On peut donc poser la définition suivante :

9.3.2.1. Définition

Si $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ sont deux matrices de type (m, n) , on appelle **somme de A et de B** , et on note $A + B$, la matrice de type (m, n) dont les éléments sont $a_{ij} + b_{ij}$ quel que soit $(i, j) \in [1, m] \times [1, n]$.

On a donc $M(u + v) = M(u) + M(v)$.

Il est clair que si A et B sont des matrices de type (m, n) , on a

$${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB.$$

On vérifie facilement que l'addition des matrices est une opération associative, commutative, et qu'elle possède un élément neutre noté 0 : c'est la matrice dont tous les éléments sont nuls. Enfin toute matrice $A = (a_{ij})$ possède une matrice opposée notée $-A$ et définie par $-A = (-a_{ij})$. Autrement dit, l'ensemble des matrices de type (m, n) est un groupe abélien pour l'addition des matrices.

9.3.3. MULTIPLICATION D'UNE MATRICE PAR UN SCALAIRE

Avec les notations précédentes, soit $M(\lambda u) = (a'_{ij})$, $\lambda \in K$, la matrice de λu par rapport aux bases $(e_1, \dots, e_n)$ et $(f_1, \dots, f_m)$. On a pour tout $j \in [1, n]$,

$$(\lambda u)(e_j) = \lambda (u(e_j)) = \lambda \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} f_i \right) = \sum_{i=1}^m (\lambda a_{ij}) f_i.$$

Donc, quel que soit $(i, j) \in [1, m] \times [1, n]$,

$$a'_{ij} = \lambda a_{ij}$$

d'où la définition

9.3.3.1. Définition

Si $A = (a_{ij})$ est une matrice de type (m, n) , le produit de A par le scalaire λ est la matrice λA obtenue en multipliant tous les éléments de A par λ .

On a donc $M(\lambda u) = \lambda M(u)$.

Il est clair que si A est une matrice de type (m, n) , on a

$${}^t(\lambda A) = \lambda {}^t A.$$

9.3.3.2. Théorème

L'ensemble $M_{m,n}(K)$ des matrices de type (m, n) , muni des opérations $(A, B) \mapsto A + B$ et $(\lambda, A) \mapsto \lambda A$, est un espace vectoriel de dimension mn .

Démonstration. Il est immédiat que si A et B sont des matrices de type (m, n) et si λ et μ sont des scalaires, alors

$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B; (\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$$

$$\lambda(\mu A) = (\lambda \mu)A; 1 \cdot A = A.$$

Comme $M_{m,n}(K)$ est un groupe abélien pour l'addition des matrices, c'est un espace vectoriel sur K .

Si E et F sont des K -espaces vectoriels de dimension n et m respectivement, rapportés à des bases, alors l'application $u \mapsto M(u)$ est un isomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$ sur l'espace vectoriel $M_{m,n}(K)$. Comme $\mathcal{L}(E, F)$ est de dimension mn d'après le Théorème 8.2.1.1, $M_{m,n}(K)$ est aussi de dimension mn .

Pour trouver une base de l'espace vectoriel $M_{m,n}(K)$, considérons les mn matrices E_{ij} de type (m, n) qui contiennent un 1 à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne et des zéros partout ailleurs.

Si $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$, on a

$$A = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} E_{ij},$$

donc les matrices E_{ij} engendrent l'espace vectoriel $M_{m,n}(K)$. Ces matrices sont linéairement indépendantes car la relation $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} E_{ij} = 0$ implique $a_{ij} = 0$ quels que soient $i \in [1, m]$ et $j \in [1, n]$.

Donc les $(E_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ forment une base de $M_{m,n}(K)$ appelée **base canonique** de $M_{m,n}(K)$.

9.3.4. PRODUIT DE DEUX MATRICES

Soient E, F, G trois espaces vectoriels sur K , $(e_1, \dots, e_n)$, $(f_1, \dots, f_m)$, $(g_1, \dots, g_r)$ des bases de E, F et G respectivement. Soient u un élément de $\mathcal{L}(E, F)$, v un élément de $\mathcal{L}(F, G)$, $M(u) = (a_{ij})$ et $M(v) = (b_{ij})$ les matrices de u et v par rapport aux bases données.

Nous nous proposons de chercher la matrice de vou par rapport aux bases $(e_1, \dots, e_n)$ et $(g_1, \dots, g_r)$.

Posons

$$M(vou) = (c_{ij}).$$

On a quel que soit $j \in [1, n]$,

$$\begin{aligned} (vou)(e_j) &= v(u(e_j)) = v\left(\sum_{k=1}^m a_{kj} f_k\right) = \sum_{k=1}^m a_{kj} v(f_k) \\ &= \sum_{k=1}^m a_{kj} \left(\sum_{i=1}^r b_{ik} g_i\right) = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^r a_{kj} b_{ik} g_i \\ &= \sum_{i=1}^r \left(\sum_{k=1}^m b_{ik} a_{kj}\right) g_i. \end{aligned}$$

Donc, par définition de c_{ij} , on a

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^m b_{ik} a_{kj},$$

d'où la définition suivante :

9.3.4.1. Définition

Soient $A = (a_{ij})$ une matrice de type (m, n) et $B = (b_{ij})$ une matrice de type (n, r) à coefficients dans K . On appelle **produit de A par B** , et on note AB , la matrice de type (m, r) dont l'élément c_{ij} situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne est donnée par :

$$(9.3.4.1) \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}.$$

On a donc $M(vou) = M(v) \cdot M(u)$.

9.3.4.2. Remarque

Le produit AB n'est défini que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B .

L'expression de c_{ij} s'obtient à partir de la ligne d'indice i de A et de la colonne d'indice j de B . On dit que l'on fait le produit AB «lignes par colonnes».

9.3.4.3. Exemples

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 14 \\ 14 & 44 \end{pmatrix}.$$

Propriétés du produit

a) Si A, B, C sont des matrices telles que les différents produits ci-dessous soient définis et si λ est un scalaire quelconque, on a

$$A(B \cdot C) = (A \cdot B)C$$

$$A(B + C) = AB + AC; (B + C)A = BA + CA$$

$$A(\lambda B) = (\lambda A)B = \lambda(AB).$$

Ces propriétés se démontrent en utilisant des propriétés bien connues des applications linéaires. Si par exemple $u : K^r \rightarrow K^s$, $v : K^m \rightarrow K^n$ et $w : K^n \rightarrow K^m$ sont des applications linéaires dont les matrices sont A, B et C respectivement par rapport aux bases canoniques, alors la matrice de $u \circ (v \circ w)$ est $A(BC)$ et la matrice de $(u \circ v) \circ w$ est $(AB)C$. Comme $(u \circ v) \circ w = u \circ (v \circ w)$, on a l'égalité $A(BC) = (AB)C$.

Les autres égalités se démontrent de même.

b) Le produit de deux matrices n'est pas commutatif en général.

c) Puisque $\mathcal{L}(E)$ est un anneau pour l'addition et la composition des applications, l'ensemble $M_n(K)$ est un anneau pour l'addition et la multiplication des matrices, l'élément unité étant la matrice unité d'ordre n . Cet anneau possède des diviseurs de zéro car on a par exemple, si $n = 2$,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$M_n(K)$ est même une K -algèbre et l'application $u \mapsto M(u)$ de $\mathcal{L}(E)$ dans $M_n(K)$ est un isomorphisme d'algèbres.

d) Si le produit AB est défini, ${}^t B^t A$ l'est aussi et on a

$${}^t(AB) = {}^t B^t A.$$

C'est immédiat.

e) En revenant au Théorème 9.2.1.7, les équations (9.2.1.2) montrent que si

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

sont les matrices colonnes des composantes de x dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ de E et des composantes de $y = u(x)$ dans la base $(f_1, \dots, f_m)$ de F , la $i^{\text{ème}}$ composante de y est le produit de la $i^{\text{ème}}$ ligne de M par la matrice colonne X . On obtient ainsi la traduction matricielle de la relation $y = u(x) : Y = MX$, soit

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

9.4. Matrices inversibles. Changement de bases

9.4.1. MATRICES INVERSIBLES

9.4.1.1. Définition

On dit qu'une matrice $M \in M_n(K)$ est **inversible** ou est **régulière** s'il existe une matrice $A \in M_n(K)$ telle que

$$(9.4.1.1) \quad MA = AM = I_n.$$

La matrice A est alors unique ; on la note M^{-1} et on l'appelle l'inverse de M .

L'ensemble des matrices carrées inversibles d'ordre n à coefficients dans K se note $GL(n, K)$. On vérifie facilement que $GL(n, K)$, muni de la multiplication des matrices, est un groupe non commutatif en général. On l'appelle le **groupe linéaire à n variable sur le corps K** ; ce groupe n'est rien d'autre que le groupe multiplicatif des éléments inversibles de l'anneau $M_n(K)$.

Les groupes $GL(n, K)$ et leurs sous-groupes s'appellent les **groupes classiques**. Leur étude a constitué une étape importante le développement de la théorie des groupes dont les applications à l'algèbre, à l'analyse moderne et à la physique sont nombreuses.

9.4.1.2. Théorème

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie n , $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et u un endomorphisme de E . Pour que la matrice $M(u)$ de u par rapport à la base $(e_1, \dots, e_n)$ soit inversible, il faut et il suffit que u soit un automorphisme de E . Alors on a

$$M(u^{-1}) = (M(u))^{-1}.$$

Démonstration. Posons $A = M(u)$. Si A est inversible il existe $B \in M_n(K)$ telle que

$$AB = BA = I_n.$$

L'application $u \mapsto M(u)$ de $\mathcal{L}(E)$ sur $M_n(K)$ étant bijective, on peut considérer l'application linéaire v associée à B . Elle est telle que

$$uov = vou = Id_E,$$

donc u est bijective et v est sa bijection réciproque : $v = u^{-1}$.

Réciproquement, si u est bijective, u^{-1} existe et

$$M(u) M(u^{-1}) = M(uou^{-1}) = M(Id_E) = I_n,$$

$$M(u^{-1}) M(u) = M(u^{-1}ou) = M(Id_E) = I_n.$$

Par suite, $M(u)$ est inversible et $(M(u))^{-1} = M(u^{-1})$.

9.4.1.3. Théorème

Soit $A \in M_n(K)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) A est inversible.
- b) ${}^t A$ est inversible.

c) Les lignes de A (considérées comme vecteurs de K^n) sont linéairement indépendantes.

d) Les colonnes de A (considérées comme vecteurs de K^n) sont linéairement indépendantes.

e) A est de rang n .

Démonstration. a) $\implies$ b) Les relations $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$ impliquent par transposition, ${}^t(A^{-1})^t A = {}^t A {}^t(A^{-1}) = I_n$, donc ${}^t A$ est inversible et $({}^t A)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

b) $\implies$ a) Il suffit d'échanger les rôles de A et ${}^t A$ et d'observer que ${}^t({}^t A) = A$.

On a a) $\iff$ e) d'après le Corollaire 8.2.3.5 car cela revient à dire qu'un endomorphisme u d'un K -espace vectoriel E de dimension finie n est inversible si et seulement si $\text{rg}(u) = n$.

On a c) $\iff$ e) d'après la Remarque 9.2.1.9. Enfin d) $\iff$ e) d'après les remarques qui suivent le Théorème 9.2.1.4, ce qui achève la démonstration du théorème.

9.4.2. CHANGEMENT DE BASES

Soit E un K -espace vectoriel de dimension n muni d'une première base $B = (e_1, \dots, e_n)$ appelée « ancienne base ». Tout vecteur x de E s'écrit de façon unique

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n.$$

On est souvent conduit à calculer les coordonnées $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$ du vecteur x par rapport à une autre base $B' = (f_1, \dots, f_n)$ de E appelée « nouvelle base ».

Avant d'examiner ce problème, nous poserons la définition suivante.

9.4.2.1. Définition

Soient E un K -espace vectoriel de dimension n , $B = (e_1, \dots, e_n)$ et $B' = (f_1, \dots, f_n)$ deux bases de E . On appelle **matrice de passage de la base B à la base B'** la matrice carrée P d'ordre n dont la $j^{\text{ème}}$ colonne est formée par les composantes de f_j par rapport à la base B .

Autrement dit, si $P = (a_{ij})$, on a

$$(9.4.2.1) \quad f_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i.$$

9.4.2.2. Remarque

Il existe un endomorphisme u de E , et un seul, tel que pour $j \in [1, n]$, on ait :

$$u(e_j) = f_j.$$

Les formules (9.4.2.1) montrent que P est la matrice de u par rapport à la base B . Comme u est un automorphisme de E (puisque'il transforme une base de E en une base de E), P est inversible :

$$P \in GL(n, K).$$

9.4.2.3. Remarque

Les relations (9.4.2.1) et les relations $Id_E(f_j) = f_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$) montrent que P est la matrice de l'application identique de E par rapport aux bases B' et B (bien noter l'ordre dans lequel doivent être prises les bases).

9.4.2.4. Théorème

Conservons les notations précédentes. Alors la matrice de passage de la base B' à la base B est P^{-1} .

Démonstration. Désignons par P' la matrice de passage de la base B' à la base B . Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} E & & Id_E & & E \\ \downarrow & \xrightarrow{\quad} & \downarrow & \xrightarrow{\quad} & \downarrow \\ B & & B' & & B \end{array}$$

En passant aux matrices associées relativement aux bases indiquées, ce diagramme se traduit par $PP' = I_n$. De même, on a $P'P = I_n$, donc

$$P' = P^{-1}.$$

9.4.2.5. Remarque

Nous venons de voir qu'une matrice de changement de base est inversible. Nous allons montrer que, réciproquement, une matrice inversible P et une base B d'un espace vectoriel E étant données, P est la matrice de passage de la base B à une base unique B' de E .

Soient en effet $P = (a_{ij})$ une matrice carrée inversible d'ordre n et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base d'un K -espace vectoriel E de dimension n . Si $f_1, \dots, f_n$ sont les n vecteurs de E définis par

$$f_j = a_{1j}e_1 + \dots + a_{nj}e_n,$$

alors l'endomorphisme u de E tel que $u(e_j) = f_j$ admet P pour matrice par rapport à la base B , donc est un automorphisme de E . Donc (Théorème 7.2.3.4 d)), $B' = (f_1, \dots, f_n)$ est une base de E et P est évidemment la matrice de passage de la base B à la base B' .

• Influence d'un changement de bases sur les composantes d'un vecteur.

9.4.2.6. Théorème

Soient E un K -espace vectoriel de dimension n , $B = (e_1, \dots, e_n)$ et $B' = (f_1, \dots, f_n)$ deux bases de E , $P = (a_{ij})$ la matrice de passage de la base B à la base B' . Soient x un vecteur de E , X (resp X') la matrice colonne de ses coordonnées dans l'ancienne base B (resp. dans la nouvelle base B'). On a la relation $X = PX'$.

Démonstration. Posons

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X' = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

On peut écrire

$$x = \sum_{j=1}^n y_j f_j = \sum_{j=1}^n y_j \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} e_i \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \right) e_i.$$

D'autre part, on peut écrire x sous la forme

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i.$$

En identifiant ces deux dernières expressions de x , on voit que

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

ce qui s'écrit matriciellement :

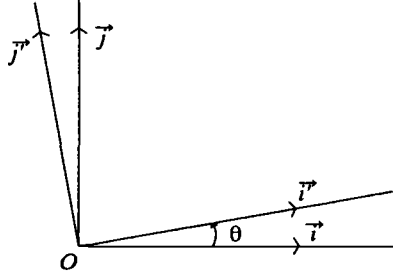
$$X = PX'.$$

Insistons sur le fait que ce sont les « anciennes » composantes $(x_j)_{1 \leq j \leq n}$ que l'on calcule en fonction des « nouvelles » composantes $(y_j)_{1 \leq j \leq n}$ par l'intermédiaire de la matrice de passage. Naturellement, on peut également exprimer X' en fonction de X :

$$X' = P^{-1}X.$$

9.4.2.7. Exemple

Dans le plan vectoriel euclidien, soit $B = (\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée. Soit $B' = (\vec{i}', \vec{j}')$ la base obtenue en effectuant sur la base B une rotation R_θ d'angle θ .



Soit $\vec{v}$ un vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans la base B et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans la base B' . On a

$$\vec{i}' = R_\theta(\vec{i}) = (\cos \theta)\vec{i} + (\sin \theta)\vec{j}$$

$$\vec{j}' = R_\theta(\vec{j}) = R_{\theta+\pi/2}(\vec{i}) = (-\sin \theta)\vec{i} + (\cos \theta)\vec{j}.$$

La matrice de passage de la base B à la base B' est donc

$$P = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

D'où

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

soit

$$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta$$

$$y = x' \sin \theta + y' \cos \theta.$$

• Influence d'un changement de bases sur la matrice d'une application linéaire.

Un problème important lié aux changements de bases dans les espaces vectoriels, est de savoir ce que devient la matrice d'une application linéaire $u : E \longrightarrow F$ lorsqu'on change de base dans E et dans F .

La solution de ce problème est donnée par le théorème suivant :

9.4.2.8. Théorème

Soient E et F deux K -espaces vectoriels de dimension n et m respectivement, et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Soient $B = (e_1, \dots, e_n)$ et $B' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases de E ,

$\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_m)$ et $\mathcal{C}' = (f'_1, \dots, f'_m)$ deux bases de F , et soit P (resp. S). La matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ (resp. de la base $\mathcal{C}$ à la base $\mathcal{C}'$). Si A est la matrice de u par rapport aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, alors la matrice M de u par rapport aux bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}'$ est donnée par la formule

$$M = S^{-1}AP.$$

Démonstration. Soient $x \in E$ et $y = u(x)$, X et X' les matrices colonnes des coordonnées de x dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, Y et Y' les matrices colonnes des coordonnées de y dans les bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.

D'après le Théorème 9.4.2.6, on a $X = PX'$ et $Y = SY'$. Mais, par définition de A , on a $Y = AX$, donc

$$SY' = APX', \text{ d'où } Y' = S^{-1}APX'.$$

Comme $Y' = MX'$, on a bien

$$M = S^{-1}AP.$$

9.4.2.9. Remarque

En utilisant la Remarque 9.4.2.2 et le Théorème 9.4.2.4, on peut retrouver le Théorème 9.4.2.8. Le faire à titre d'exercice en considérant le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} E & \xrightarrow{Id_E} & E & \xrightarrow{u} & F & \xrightarrow{Id_F} & F \\ \mathcal{B}' & & \mathcal{B} & & \mathcal{C} & & \mathcal{C}' \end{array}$$

9.4.2.10. Corollaire

Soient E un K -espace vectoriel de dimension n , u un endomorphisme de E et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$ deux bases de E . Soient P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$ et A la matrice de u par rapport à la base $\mathcal{B}$. Alors la matrice de u par rapport à la base $\mathcal{C}$ est $M = P^{-1}AP$.

Si $F = E$ il suffit, dans le Théorème 9.4.2.8, de prendre la base $\mathcal{C}$ identique à la base $\mathcal{B}$ et la base $\mathcal{C}'$ identique à la base $\mathcal{B}'$. Les deux matrices S et P sont alors identiques et on a bien la relation

$$M = P^{-1}AP.$$

9.4.2.11. Définition

On dit que deux matrices A et M de $M_n(K)$ sont **semblables** s'il existe une matrice $P \in GL(n, K)$ telle que

$$M = P^{-1}AP.$$

La relation de similitude est une relation d'équivalence sur $M_n(K)$.

La définition et le Corollaire 9.4.2.10 montrent que deux matrices carrées A et M d'ordre n sont semblables si et seulement si, étant donné un K -espace vectoriel E de dimension n , A et M représentent le même endomorphisme u de E par rapport à deux bases différentes de E . On pourra donc déterminer une base de E par rapport à laquelle la matrice de u soit aussi simple que possible. Nous examinerons ce problème ultérieurement.

9.4.3. MATRICES ÉQUIVALENTES

9.4.3.1. Définition

On dit que deux matrices A et B de type (m, n) sont équivalentes, s'il existe une matrice inversible P d'ordre m et une matrice inversible Q d'ordre n telle que

$$A = PBQ.$$

Il est clair que l'équivalence des matrices est une relation d'équivalence sur $M_{m,n}(K)$.

9.4.3.2. Théorème

Soient E et F deux K -espaces vectoriels de dimension n et m respectivement, $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E , $C = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Soient B la matrice de u par rapport aux bases B et C et A une matrice de type (m, n) . Pour que A et B soient équivalentes, il faut et il suffit que A soit la matrice de u par rapport à des bases B' de E et C' de F .

Démonstration. Supposons que A et B soient équivalentes. Il existe donc $P \in GL(m, K)$ et $Q \in GL(n, K)$ telles que $A = PBQ$. La matrice Q étant inversible, c'est la matrice de passage de la base B à une base B' de E . De même P^{-1} est la matrice de passage de la base C à une base C' de F . Alors d'après le Théorème 9.4.2.8, la matrice de u par rapport aux bases B' et C' est $(P^{-1})^{-1}BQ = PBQ = A$.

Réciproquement, supposons que A et B soient les matrices de la même application linéaire u par rapport aux bases B' et C' d'une part, B et C d'autre part. Soient P la matrice de passage de la base B à la base B' et S la matrice de passage de la base C à la base C' . D'après le Théorème 9.4.2.8, on a $A = S^{-1}BP$. Les matrices S^{-1} et P étant inversibles, A et B sont équivalentes.

9.4.3.3. Théorème

Soient E et F deux K -espaces vectoriels de dimension n et m respectivement et u une application linéaire de E dans F , de rang r . Alors il existe une base de E et une base de F par rapport auxquelles la matrice de u est de la forme

$$A(m, n, r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & : & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & : & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & : & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & : & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & : & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & : & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & : & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & : & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$\begin{matrix} \updownarrow r \\ \updownarrow m-r \end{matrix}$

$\begin{matrix} \leftarrow r & \leftarrow n-r \end{matrix}$

Démonstration. Soit E' un supplémentaire de $\text{Ker}(u)$ dans E . Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E obtenue en complétant une base $(e_1, \dots, e_r)$ de E' par une base $(e_{r+1}, \dots, e_n)$ de $\text{Ker}(u)$. Posons $f_j = u(e_j)$ si $1 \leq j \leq r$. Montrons que les vecteurs $f_1, \dots, f_r$ forment une base de $\text{Im}(u)$. La famille $\{f_1, \dots, f_r\}$ est libre dans $\text{Im}(u)$ car :

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i u(e_i) = 0 \implies u \left(\sum_{i=1}^r \lambda_i e_i \right) = 0.$$

Le vecteur $\sum_{i=1}^r \lambda_i e_i$ appartenant à $\text{Ker}(u)$ et à E' est nul, donc $\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0$.

Comme $u(e_i) = 0$ pour tout $i \in \{r+1, \dots, n\}$, les vecteurs $f_1, \dots, f_r$ engendrent $\text{Im}(u)$, d'où notre assertion.

Complétons les vecteurs $f_1, \dots, f_r$ par des vecteurs arbitraires $f_{r+1}, \dots, f_m$ pour obtenir une base $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_r, f_{r+1}, \dots, f_m)$ de F . La matrice de u par rapport aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ a bien la forme indiquée puisque

$$u(e_1) = f_1, \dots, u(e_r) = f_r, u(e_{r+1}) = \dots = u(e_n) = 0.$$

9.4.3.4. Corollaire

Toute matrice de type (m, n) de rang r est équivalente à la matrice $A(m, n, r)$. En particulier, deux matrices de type (m, n) sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang.

Démonstration. La première partie du Corollaire n'est qu'une traduction du Théorème 9.4.3.3.

Si deux matrices A et B de type (m, n) sont équivalentes, elles représentent la même application linéaire u par rapport à des bases différentes (Théorème 9.4.3.2). A et B ont donc le même rang que u .

Réciproquement, si A et B ont pour rang r , elles sont équivalentes à la matrice $A(m, n, r)$ du Théorème 9.4.3.3 ; elles sont donc équivalentes entre elles.

9.4.3.5. Corollaire

Soit A une matrice de type (m, n) . Alors A et tA ont même rang.

Soit r le rang de A . D'après le Corollaire 9.4.3.4, il existe deux matrices inversibles P et Q de type (m, m) et (n, n) respectivement telles que

$$A = PA(m, n, r)Q.$$

En transposant, il vient

$${}^tA = {}^tQ {}^tA(m, n, r) {}^tP.$$

Comme tQ et tP sont inversibles d'après le Théorème 9.4.1.3, tA est équivalente à ${}^tA(m, n, r)$. Mais ${}^tA(m, n, r) = A(n, m, r)$; donc ${}^tA(m, n, r)$ est de rang r et on a $r = rg(A) = rg({}^tA)$.

Chapitre 10 : DÉTERMINANTS

Le lecteur a déjà rencontré la notion de déterminant dans les classes antérieures à propos de l'étude des systèmes d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^2$ et dans $\mathbb{R}^3$.

Dans ce chapitre, nous définissons d'abord le déterminant d'un couple de vecteurs, le déterminant d'un endomorphisme relativement à une base d'un espace vectoriel de dimension deux, puis le déterminant d'une matrice carrée d'ordre deux.

Les applications et les formes multilinéaires sont alors introduites, ce qui nous permet de définir les déterminants dans un espace vectoriel de dimension finie quelconque. Nous étudions en particulier, les propriétés des déterminants qui découlent du fait qu'un déterminant est une forme multilinéaire alternée.

Dans ce chapitre, K désignera un corps commutatif de caractéristique différente de 2. Dans les applications, ce corps sera toujours $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

10.1. Applications et formes bilinéaires

10.1.1. APPLICATIONS ET FORMES BILINÉAIRES ALTERNÉES

10.1.1.1. Définition

*Soient E_1, E_2, F trois espaces vectoriels sur le même corps K . On dit qu'une application f de $E_1 \times E_2$ dans F est **bilinéaire** si, quels que soient les vecteurs x et x' de E_1 , y et y' de E_2 et le scalaire λ , on a*

$$f(x + x', y) = (f(x, y) + f(x', y))$$

$$f(x, y + y') = f(x, y) + f(x, y')$$

$$f(\lambda x, y) = f(x, \lambda y) = \lambda f(x, y).$$

Autrement dit, l'application $(x, y) \mapsto f(x, y)$ est, pour y fixé, linéaire par rapport à la variable x et, pour x fixé, linéaire par rapport à la variable y .

Si $E_1 = E_2 = E$, on dit que f est une **application bilinéaire** sur E . Si, de plus, $F = K$, on dit que f est une **forme bilinéaire** sur E .

10.1.1.2. Remarque

Il résulte immédiatement des définitions que quels que soient les vecteurs x et y de E et le scalaire λ , on a

$$f(x, 0) = 0, \quad f(0, y) = 0, \quad f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 f(x, y).$$

10.1.1.3. Définition

Soit E un K -espace vectoriel. On dit qu'une forme bilinéaire f sur E est :

- **symétrique** si $f(x, y) = f(y, x)$ quels que soient les vecteurs $x, y \in E$,
- **antisymétrique** si $f(y, x) = -f(x, y)$ quels que soient les vecteurs $y, x \in E$,
- **alternée** si $f(x, x) = 0$ quel que soit le vecteur x de E .

On a la caractérisation suivante des formes bilinéaires alternées.

10.1.1.4. Théorème

Soit E un K -espace vectoriel. Une forme bilinéaire f sur E est alternée si et seulement si elle est antisymétrique.

Démonstration. Si f est alternée, on a quels que soient $x, y \in E$,

$$f(x + y, x + y) = 0.$$

En développant, il vient

$$f(x, x) + f(x, y) + f(y, x) + f(y, y) = 0,$$

d'où, puisque f est alternée, $f(x, y) = -f(y, x)$.

Réciproquement, si f est une forme bilinéaire antisymétrique, en posant $y = x$ dans l'égalité $f(y, x) = -f(x, y)$ on obtient :

$$f(x, x) = -f(x, x),$$

soit $2f(x, x) = 0$, d'où $f(x, x) = 0$ puisque la caractéristique de K est différente de 2.

10.1.1.5. Exemple

Prenons $K = \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}^2$. L'application $f : E \times E \longrightarrow K$ définie par

$$f((x, x'), (y, y')) = xy' - x'y$$

est une forme bilinéaire alternée.

La vérification est immédiate et est laissée au lecteur.

10.1.2. CAS OÙ $\dim(E) = 2$

Jusqu'à présent, nous n'avons pas supposé que les espaces vectoriels considérés étaient de dimension finie. Nous allons étudier maintenant les formes bilinéaires alternées sur un K -espace vectoriel E de dimension 2.

10.1.2.1. Théorème

Soit E un K -espace vectoriel de dimension 2. L'ensemble des formes bilinéaires alternées sur E est un K -espace vectoriel de dimension 1.

Démonstration. On démontre sans peine que l'ensemble $A_2(E)$ des formes bilinéaires alternées sur E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(E \times E, K)$ des applications de $E \times E$ dans K .

Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base de E et (x, y) un couple de vecteurs de E . Si f est une forme bilinéaire alternée sur E , on a

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_1 e_1 + x_2 e_2, y_1 e_1 + y_2 e_2) \\ &= x_1 y_1 f(e_1, e_1) + x_1 y_2 f(e_1, e_2) + x_2 y_1 f(e_2, e_1) + x_2 y_2 f(e_2, e_2). \end{aligned}$$

Comme f est alternée, on a

$$\begin{aligned} f(e_1, e_1) &= f(e_2, e_2) = 0 \\ f(e_2, e_1) &= -f(e_1, e_2). \end{aligned}$$

Par suite, il reste

$$f(x, y) = (x_1 y_2 - x_2 y_1) f(e_1, e_2).$$

D'après l'Exemple 10.1.1.5, l'application $h_{\mathcal{B}}$ définie par

$$h_{\mathcal{B}}(x, y) = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

est une forme bilinéaire alternée vérifiant :

$$h_{\mathcal{B}}(e_1, e_2) = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1.$$

On a donc, dans $A_2(E)$, l'égalité

$$f = f(e_1, e_2) h_{\mathcal{B}},$$

ce qui montre que $\{h_{\mathcal{B}}\}$ est une base de $A_2(E)$.

10.1.2.2. Corollaire

Soit E un K -espace vectoriel de dimension 2 et soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base de E . Il existe une forme bilinéaire alternée f et une seule sur E telle que $f(e_1, e_2) = 1$.

Soit f une forme bilinéaire alternée telle que $f(e_1, e_2) = 1$. On a d'après le Théorème 10.1.2.1, $f = 1 \cdot h_{\mathcal{B}} = h_{\mathcal{B}}$, ce qui montre que f coïncide avec la forme bilinéaire alternée $h_{\mathcal{B}}$.

10.1.3. DÉTERMINANT D'ORDRE 2

10.1.3.1. Définition

Soient E un espace vectoriel sur K de dimension 2 et $B = (e_1, e_2)$ une base de E . Soient x et y des vecteurs de E . On appelle **déterminant de x et y par rapport à la base B** , le scalaire $\det_B(x, y)$. On le note $\det_B(x, y)$.

Nous avons vu que si $x = x_1e_1 + x_2e_2$ et $y = y_1e_1 + y_2e_2$, alors $\det_B(x, y) = x_1y_2 - x_2y_1$. On convient d'écrire

$$(10.1.3.1) \quad \det_B(x, y) = x_1y_2 - x_2y_1 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

10.1.3.2. Remarque

L'application $(x, y) \mapsto \det_B(x, y)$ vérifie évidemment toutes les propriétés des formes bilinéaires alternées. Mais l'intérêt essentiel des déterminants vient du théorème suivant.

10.1.3.3. Théorème

Soient E un K -espace vectoriel de dimension 2 et B une base de E . Alors pour que deux vecteurs x et y de E soient linéairement indépendants, il faut et il suffit que $\det_B(x, y) \neq 0$.

Démonstration. Supposons que x et y soient linéairement dépendants. Alors, on a par exemple $x = \lambda y$ et

$$\det_B(x, y) = \det_B(\lambda y, y) = \lambda \det_B(y, y) = 0.$$

Supposons maintenant que x et y soient linéairement indépendants. Ils forment alors une base B' de E . Puisque $\det_{B'}$ est une forme bilinéaire alternée, il existe d'après le Théorème 10.1.2.1, un scalaire $\lambda \in K$ tel que $\det_{B'}(x, y) = \lambda \det_B(x, y)$ et puisque d'après le Corollaire 10.1.2.2, $\det_{B'}(x, y) = 1$, on obtient $\det_B(x, y) \neq 0$.

10.1.4. DÉTERMINANT D'UN ENDOMORPHISME

Soient E un K -espace vectoriel de dimension 2 et f une forme bilinéaire alternée non nulle sur E . Pour tout endomorphisme u de E , considérons l'application $g : E \times E \rightarrow K$ définie par

$$g(x, y) = f(u(x), u(y))$$

quels que soient x, y dans E .

Il est clair que g est une forme bilinéaire alternée sur E ; de plus on vérifie facilement que l'application φ_u qui à f associe g est un endomorphisme de $A_2(E)$. Comme $\dim(A_2(E)) = 1$, tout endomorphisme de $A_2(E)$ est une homothétie. Il existe donc un scalaire unique λ indépendant de f tel que, quels que soient les vecteurs x et y de E , on ait

$$f(u(x), u(y)) = \lambda f(x, y).$$

Cette remarque nous amène à poser la définition suivante :

10.1.4.1. Définition

Soit u un endomorphisme d'un K -espace vectoriel E de dimension 2. On appelle **déterminant** de u , et on note $\det(u)$, l'unique scalaire tel que pour toute forme bilinéaire alternée f sur E et pour tout couple $(x, y) \in E^2$, on ait

$$(10.1.4.1) \quad f(u(x), u(y)) = (\det(u)) f(x, y).$$

10.1.4.2. Remarque

Si on applique la relation (10.1.4.1) pour une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ de E et si on prend $(x, y) = (e_1, e_2)$, on obtient une expression du déterminant de u :

$$(10.1.4.2) \quad \det(u) = \det_{\mathcal{B}}(u(e_1), u(e_2)).$$

On a les propriétés suivantes du déterminant d'un endomorphisme.

10.1.4.3. Théorème

Soit E un K -espace vectoriel de dimension 2. Alors :

- a) $\det(Id_E) = 1$.
- b) Pour tout endomorphisme u de E et pour tout $\lambda \in K$, on a $\det(\lambda u) = \lambda^2 \det(u)$.
- c) Quels que soient les endomorphismes u et v de E , on a $\det(vu) = \det(v) \det(u)$.
- d) Un endomorphisme u de E est inversible si et seulement si $\det(u) \neq 0$ et dans ce cas

$$\det(u^{-1}) = (\det(u))^{-1}.$$

Démonstration. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base de E .

a) On a

$$\det(Id_E) = \det_{\mathcal{B}}(Id_E(e_1), Id_E(e_2)) = \det_{\mathcal{B}}(e_1, e_2) = 1.$$

b) On a de même pour tout scalaire λ ,

$$\det(\lambda u) = \det_B(\lambda u(e_1), \lambda u(e_2)) = \lambda^2 \det_B(u(e_1), u(e_2)) = \lambda^2 \det(u).$$

c) En appliquant plusieurs fois la relation (10.1.4.2), on obtient

$$\begin{aligned} \det(vou) &= \det_B(vou(e_1), vou(e_2)) \\ &= \det_B(v(u(e_1)), v(u(e_2))) \\ &= (\det(v)) \det_B(u(e_1), u(e_2)) = (\det(v)) \cdot (\det(u)). \end{aligned}$$

d) L'endomorphisme u est inversible si et seulement si $(u(e_1), u(e_2))$ est une base de E , c'est-à-dire si et seulement si $\det_B(u(e_1), u(e_2)) \neq 0$ (Théorème 10.1.3.3), donc si et seulement si $\det(u) \neq 0$ d'après (10.1.4.2).

Si u est inversible, de la relation $uou^{-1} = Id_E$ on déduit en appliquant a) et c) :

$$\det(uou^{-1}) = 1 = (\det(u)) (\det(u^{-1})).$$

$$\text{D'où} \quad \det(u^{-1}) = (\det(u))^{-1}.$$

10.1.5. DÉTERMINANT D'UNE MATRICE CARRÉE D'ORDRE 2

Soit A une matrice carrée d'ordre 2 à coefficients dans K . Nous savons que A peut être considérée comme la matrice d'un endomorphisme unique u de K^2 rapporté à sa base canonique. Cela permet de définir le déterminant de A comme étant le déterminant de u .

10.1.5.1. Définition

Soit A une matrice carrée d'ordre 2 à coefficients dans K :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

On appelle **déterminant** de A , et on note $\det(A)$, le scalaire défini par

$$\det(A) = \det(u) = ad - bc.$$

On a les propriétés suivantes du déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2.

10.1.5.2. Théorème

a) $\det(I_2) = 1$.

b) Si $A \in M_2(K)$, on a $\det(A) = \det({}^t A)$ et $\det(\lambda A) = \lambda^2 \det(A)$ pour tout $\lambda \in K$.

c) Soient A et B deux matrices carrées d'ordre 2. On a

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B).$$

d) Une matrice $A \in M_2(K)$ est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$ et dans ce cas, on a

$$\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}.$$

e) Si A et B sont deux matrices carrées d'ordre 2 semblables, on a

$$\det(A) = \det(B).$$

Démonstration. Ces propriétés se vérifient aisément par le calcul. Elles découlent également des propriétés analogues du déterminant d'un endomorphisme.

Pour démontrer e), on remarque que si A et B sont semblables, il existe une matrice carrée inversible P d'ordre 2 telle que $B = P^{-1}AP$. Donc, d'après c), on a

$$\begin{aligned} \det(B) &= \det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1}) \cdot \det(A) \cdot \det(P) \\ &= \det(P)^{-1} \cdot \det(P) \cdot \det(A) = \det(A). \end{aligned}$$

10.1.5.3. Corollaire

Pour tout endomorphisme u de E , on a

$$\det({}^t u) = \det(u).$$

10.2. Applications et formes multilinéaires

Dans ce paragraphe, nous nous proposons d'étendre la notion d'application bilinéaire définie au paragraphe précédent.

Soit p un nombre entier ≥ 1 et soient $E_1, \dots, E_p$ et F des K -espaces vectoriels. L'ensemble $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$ sera muni de sa structure d'espace vectoriel produit.

10.2.1. APPLICATIONS ET FORMES MULTILINÉAIRES ALTERNÉES

10.2.1.1. Définition

On dit qu'une application $f : E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p \longrightarrow F$ est p -linéaire si pour tout indice j tel que $1 \leq j \leq p$ et pour tout système de vecteurs $x_i \in E_i$ ($i \neq j$), l'application de E_j dans F définie par :

$$x_j \longmapsto f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_p)$$

est linéaire.

Une application p -linéaire de $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$ dans K s'appelle une forme p -linéaire.

Si $E_1 = \dots = E_p = E$ une application p -linéaire sur E^p à valeurs dans F s'appelle une application p -linéaire sur E .

Une forme p -linéaire sur E^p s'appelle une forme p -linéaire sur E .

Si $p = 1$, on retrouve les notions d'application linéaire et de forme linéaire. Si $p = 2$, on a les notions d'application bilinéaire et de forme bilinéaire.

Les propriétés suivantes résultent immédiatement des définitions :

a) Si f est une application p -linéaire de $E_1 \times \dots \times E_p$ dans F , alors $f(x_1, \dots, x_p) = 0$ dès que l'un des x_i est le vecteur nul.

b) Quels que soient les scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, on a

$$f(\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_p x_p) = \lambda_1 \dots \lambda_p f(x_1, \dots, x_p).$$

c) L'ensemble des applications p -linéaires de $E_1 \times \dots \times E_p$ dans F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des applications de $E_1 \times \dots \times E_p$ dans F . Ce sous-espace est noté $\mathcal{L}_p(E_1, \dots, E_p; F)$ et $\mathcal{L}_p(E; F)$ si $E_1 = \dots = E_p = E$. $\mathcal{L}_p(E)$ désignera l'espace des formes p -linéaires sur E .

10.2.1.2. Définition

Soient E et F des espaces vectoriels sur K , et $p \geq 1$ un nombre entier. On dit qu'une application p -linéaire $f : E^p \longrightarrow F$ est :

– symétrique si

$$f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) = f(x_1, \dots, x_p)$$

quels que soient les $x_i \in E$ et la permutation $\sigma \in s_p$,

– antisymétrique si

$$f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma)f(x_1, \dots, x_p)$$

quels que soient les $x_i \in E$ et la permutation $\sigma \in S_p$ ($\varepsilon(\sigma)$ désigne la signature de σ),

– alternée si

$$f(x_1, \dots, x_p) = 0$$

chaque fois que deux des vecteurs x_i sont égaux.

On vérifie facilement que l'ensemble des applications p -linéaire symétriques (resp. alternées) $f : E^p \longrightarrow F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}_p(E; F)$. On le note $\mathcal{S}_p(E; F)$ (resp. $\mathcal{A}_p(E; F)$).

Lorsqu'il s'agit de formes p -linéaires, ces espaces seront notés respectivement $\mathcal{S}_p(E)$ et $\mathcal{A}_p(E)$.

10.2.2. PROPRIÉTÉS DES APPLICATIONS ET DES FORMES MULTILINÉAIRES ALTERNÉES

10.2.2.1. Théorème

Soient E et F des K -espaces vectoriels. Une application p -linéaire f de E^p dans F est alternée si et seulement si elle est antisymétrique.

Démonstration. Supposons f alternée. Soit σ une permutation de $\{1, 2, \dots, p\}$. Cette permutation est un produit de s transpositions et sa signature est $\varepsilon(\sigma) = (-1)^s$. Il suffit donc de montrer que pour la transposition qui échange les entiers i et j , on a

$$f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_p) = -f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_p).$$

En utilisant le fait que f est alternée et multilinéaire, nous obtenons

$$\begin{aligned} 0 &= f(x_1, \dots, x_i + x_j, \dots, x_i + x_j, \dots, x_p) \\ &= f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_p) + \\ &\quad f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_p) + \\ &\quad f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_p) + \\ &\quad f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_j, \dots, x_p). \end{aligned}$$

Puisque f est alternée, il reste

$$f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_p) + f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_p) = 0,$$

d'où l'égalité à démontrer.

Supposons f antisymétrique. Soit $(x_1, \dots, x_p)$ un élément de E^p tel que $x_i = x_j$ avec $i \neq j$. La signature de la transposition τ qui échange i et j étant égale à -1 , nous avons :

$$f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_p) = -f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_p).$$

On en déduit $2f(x_1, \dots, x_p) = 0$ et puisque K n'est pas de caractéristique 2, il vient $f(x_1, \dots, x_p) = 0$, ce qui achève la démonstration du théorème.

Le théorème suivant et ses corollaires joueront un rôle important dans la suite de ce chapitre.

10.2.2.2. Théorème

Soient E et F des K -espaces vectoriels et f une application p -linéaire alternée de E^p dans F . Si les vecteurs $x_1, \dots, x_p$ de E sont linéairement dépendants, on a $f(x_1, \dots, x_p) = 0$.

Démonstration. Si les vecteurs $x_1, \dots, x_p$ sont linéairement dépendants, l'un d'eux, par exemple x_1 , est combinaison linéaire des autres :

$$x_1 = \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_p x_p,$$

où les λ_i sont des scalaires. Donc

$$f(x_1, \dots, x_p) = \sum_{j=2}^p \lambda_j f(x_j, x_2, \dots, x_p).$$

Puisque f est alternée, on a pour tout $j \in \{2, \dots, p\}$, $f(x_j, x_2, \dots, x_p) = 0$ car x_j est égal à l'un des vecteurs $x_2, \dots, x_p$.

10.2.2.3. Corollaire

Les notations étant celles du Théorème 10.2.2.2, $f(x_1, \dots, x_p)$ ne change pas si on ajoute à l'un des vecteurs x_i une combinaison linéaire des autres vecteurs.

Démonstration. Supposons que le vecteur y soit une combinaison linéaire des vecteurs x_j pour $j \neq i$:

$$y = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{i-1} x_{i-1} + \lambda_{i+1} x_{i+1} + \dots + \lambda_p x_p,$$

où les λ_j sont des scalaires.

D'après le Théorème 10.2.2.2, on a

$$f(x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_p) = 0.$$

Donc

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + y, x_{i+1}, \dots, x_p) &= \\ f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_p) + f(x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_p) &= \\ f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_p). \end{aligned}$$

10.2.2.4. Corollaire

Soit E un K -espace vectoriel de dimensions finie r . Alors quel que soit le K -espace vectoriel F , toute application p -linéaire alternée de E^p dans F est nulle pour $r < p$.

Démonstration. Soit $f : E^p \longrightarrow F$ une application p -linéaire alternée. Si $\dim(E) = r < p$, toute famille $\{x_1, \dots, x_p\}$ de p vecteurs de E est liée. Donc quels que soient les vecteurs $x_1, \dots, x_p$ de E , on a

$$f(x_1, \dots, x_p) = 0,$$

et par suite f est l'application nulle de E^p dans F .

Lorsque E est un K -espace vectoriel de dimension finie p , il existe effectivement des applications p -linéaires alternées non identiquement nulles sur E à valeurs dans un K -espace vectoriel F quelconque. Nous allons démontrer ce résultat lorsque $F = K$.

10.2.2.5. Théorème

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie p et $B = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E . Alors :

a) L'espace vectoriel $A_p(E)$ des formes p -linéaires alternées sur E est de dimension 1.

b) Il existe une unique forme p -linéaire alternée D sur E telle que

$$D(e_1, \dots, e_p) = 1.$$

Démonstration. a) Soit f une forme p -linéaire alternée sur E . Pour tout système de p vecteurs $x_1, \dots, x_p$ de E , posons

$$x_i = \sum_{j=1}^p \lambda_{ji} e_j \quad (1 \leq i \leq p).$$

f étant p -linéaire, nous avons

$$(10.2.2.1) \quad f \left(\sum_{j_1=1}^p \lambda_{j_1,1} e_{j_1}, \dots, \sum_{j_p=1}^p \lambda_{j_p,p} e_{j_p} \right) = \sum \lambda_{j_1,1} \dots \lambda_{j_p,p} f(e_{j_1}, \dots, e_{j_p})$$

la sommation étant étendue aux p^p systèmes $\{j_1, \dots, j_p\}$ d'entiers pris dans $\{1, 2, \dots, p\}$ indépendamment les uns des autres.

Puisque f est alternée, on a $f(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}) = 0$ si deux des entiers $j_1, \dots, j_p$ sont égaux. Dans la somme (10.2.2.1), nous pouvons donc retenir les seuls termes pour lesquels les entiers $j_1, \dots, j_p$ sont tous différents, c'est-à-dire constituent une permutation des p premiers entiers naturels ; il existe alors une permutation $\sigma \in S_p$ telle que

$$j_1 = \sigma(1), \dots, j_p = \sigma(p);$$

et puisque f est antisymétrique, nous avons

$$f(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}) = f(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma) f(e_1, \dots, e_p).$$

Tous les systèmes d'indices distincts sont obtenus lorsque σ parcourt le groupe symétrique s_p . Finalement, la somme (10.2.2.1) s'écrit

$$(10.2.2.2) \quad f(x_1, \dots, x_p) = f(e_1, \dots, e_p) \left(\sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma) \lambda_{\sigma(1),1} \dots \lambda_{\sigma(p),p} \right).$$

Soit D l'application de E^p dans K définie par

$$(10.2.2.3) \quad D(x_1, \dots, x_p) = \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma) \lambda_{\sigma(1),1} \dots \lambda_{\sigma(p),p}.$$

Nous avons, quels que soient les vecteurs $x_1, \dots, x_p$ de E

$$f(x_1, \dots, x_p) = f(e_1, \dots, e_p) D(x_1, \dots, x_p),$$

c'est-à-dire $f = f(e_1, \dots, e_p)D$.

Pour achever la démonstration du a), il suffit donc de montrer que D est une forme p -linéaire alternée non nulle sur E . Chaque terme de la somme (10.2.2.3) dépend linéairement de chacun des vecteurs $x_1, \dots, x_p$, donc D est une forme p -linéaire sur E . Montrons qu'elle est alternée. Soient i et j deux entiers quelconques mais distincts appartenant à $\{1, \dots, p\}$ et supposons que $x_i = x_j$. Nous devons montrer que $D(x_1, \dots, x_p) = 0$.

Soit τ la transposition qui échange i et j . On a pour toute permutation $\sigma \in S_p$, $\varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon(\sigma) \varepsilon(\tau) = -\varepsilon(\sigma)$. D'autre part, A_p désignant l'ensemble des permutations paires, on a $S_p = A_p \cup A_p\tau$, d'où

$$\begin{aligned} D(x_1, \dots, x_p) &= \sum_{\sigma \in A_p} \varepsilon(\sigma) \lambda_{\sigma(1),1} \dots \lambda_{\sigma(p),p} + \sum_{\sigma \in A_p} \varepsilon(\sigma\tau) \lambda_{\sigma\tau(1),1} \dots \lambda_{\sigma\tau(p),p} \\ &= \sum_{\sigma \in A_p} \varepsilon(\sigma) \lambda_{\sigma(1),1} \dots \lambda_{\sigma(p),p} - \sum_{\sigma \in A_p} \varepsilon(\sigma) \lambda_{\sigma(1),1} \dots \lambda_{\sigma(p),p} \end{aligned}$$

car

$$\sigma(\tau(1)) = \sigma(1), \dots, \sigma(\tau(i)) = \sigma(j), \dots, \sigma(\tau(j)) = \sigma(i), \dots, \sigma(\tau(p)) = \sigma(p).$$

Comme $x_i = x_j$ par hypothèse, on a

$$\lambda_{\sigma(i),i} = \lambda_{\sigma(i),j} \text{ et } \lambda_{\sigma(j),j} = \lambda_{\sigma(j),i}.$$

Donc $D(x_1, \dots, x_p) = 0$ et D est bien alternée.

Montrons que D est non nulle. Pour cela prenons $x_1 = e_1, \dots, x_p = e_p$. On a alors $\lambda_{ij} = \delta_{ij}$ (symbole de Kronecker). D'où d'après la formule (10.2.2.3),

$$D(e_1, \dots, e_p) = \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma) \delta_{\sigma(1),1} \dots \delta_{\sigma(p),p}.$$

Tous les termes de cette dernière somme sont nuls sauf lorsque $\sigma(1) = 1, \dots, \sigma(p) = p$. Dans ce cas σ est la permutation identique dont la signature est $+1$. On en déduit que

$$(10.2.2.4) \quad D(e_1, \dots, e_p) = 1.$$

b) Nous venons de voir qu'il existe une forme p -linéaire alternée D sur E telle que $D(e_1, \dots, e_p) = 1$ et telle que

$$f = f(e_1, \dots, e_p)D$$

pour toute forme p -linéaire alternée f sur E . Donc si $f(e_1, \dots, e_p) = 1$, alors $f = D$, d'où l'unicité de D .

10.2.2.6. Corollaire

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie p , $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et f une forme p -linéaire alternée sur E . Pour que f soit nulle il faut et il suffit que $f(e_1, \dots, e_p) = 0$.

Démonstration. Si f est nulle, il est clair que $f(e_1, \dots, e_p) = 0$.

Réciproquement, si $f(e_1, \dots, e_p) = 0$, on a d'après la formule (10.2.2.2), $f(x_1, \dots, x_p) = 0$ pour toute suite $(x_1, \dots, x_p)$ d'éléments de E , donc $f = 0$.

10.3. Déterminants

Les résultats du paragraphe précédent permettent de définir le déterminant d'un système de vecteurs, d'un endomorphisme et d'une matrice carrée.

10.3.1. DÉTERMINANT D'UN SYSTÈME DE VECTEURS

10.3.1.1. Définition

*Soient E un espace vectoriel de dimension p sur K , $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et p vecteurs $x_1, \dots, x_p$ de E . on appelle **déterminant de $x_1, \dots, x_p$ par rapport à la base $\mathcal{B}$** , le scalaire $D(x_1, \dots, x_p)$ défini par la relation (10.2.2.3).*

On note $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_p)$ le déterminant de $x_1, \dots, x_p$ par rapport à la base $\mathcal{B}$.

L'application $\det_{\mathcal{B}}$ possède les propriétés suivantes :

10.3.1.2. Théorème

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie p et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E .

a) *L'application déterminant est une forme p -linéaire alternée et on a*

$$\det_{\mathcal{B}}(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma) \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_p)$$

pour toute suite $(x_1, \dots, x_p)$ de p vecteurs de E et pour toute permutation $\sigma \in S_p$.

b) Le déterminant de p vecteurs ne change pas si l'on ajoute à l'un d'entre eux une combinaison linéaire des autres vecteurs.

c) Si $B' = (e'_1, \dots, e'_p)$ est une autre base de E , on a pour toute suite $(x_1, \dots, x_p)$ de p vecteurs de E ,

$$(10.3.1.1) \quad \det_{B'}(x_1, \dots, x_p) = \det_B(x_1, \dots, x_p) \det_{B'}(e_1, \dots, e_p).$$

d) p vecteurs $x_1, \dots, x_p$ de E sont linéairement indépendants si et seulement si $\det_B(x_1, \dots, x_p) \neq 0$.

Démonstration. La propriété a) résulte du Théorème 10.2.2.5. et la propriété b) est une propriété générale des formes multilinéaires alternées (voir le Corollaire 10.2.2.3).

c) D'après le Théorème 10.2.2.5, il existe un scalaire λ tel que

$$\det_{B'}(x_1, \dots, x_p) = \lambda \det_B(x_1, \dots, x_p).$$

En prenant $x_1 = e_1, \dots, x_p = e_p$, il vient d'après la formule (10.2.2.4) :

$$\det_{B'}(x_1, \dots, x_p) = \lambda \det_B(e_1, \dots, e_p) = \lambda,$$

d'où l'égalité à démontrer.

d) Nous savons déjà que si les vecteurs $x_1, \dots, x_p$ sont linéairement dépendants, alors $\det_B(x_1, \dots, x_p) = 0$ (Théorème 10.2.2.2).

Réciproquement, si la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est libre, c'est une base B' de E . Puisque $\det_{B'}$ est une forme p -linéaire alternée, il existe d'après le Théorème 10.2.2.5 un scalaire λ tel que $\det_{B'}(x_1, \dots, x_p) = \lambda \det_B(x_1, \dots, x_p)$ et puisque $\det_{B'}(x_1, \dots, x_p) = 1$, on a bien $\det_B(x_1, \dots, x_p) \neq 0$.

10.3.2. DÉTERMINANT D'UN ENDORMORPHISME

10.3.2.1. Théorème

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie p et u un endomorphisme de E . Il existe un scalaire et un seul, appelé **déterminant de u** , et noté $\det(u)$, tel que pour toute forme p -linéaire alternée f sur E et pour toute suite $(x_1, \dots, x_p)$ de vecteurs de E , on ait :

$$(10.3.2.1) \quad f(u(x_1), \dots, u(x_p)) = \det(u) f(x_1, \dots, x_p).$$

Démonstration. Pour tout $f \in A_p(E)$, considérons l'application $\varphi_u(f)$ de E^p dans K donnée par

$$\varphi_u(f)(x_1, \dots, x_p) = f(u(x_1), \dots, u(x_p)).$$

On vérifie facilement que $\varphi_u(f)$ est une forme p -linéaire alternée sur E et que l'application $f \mapsto \varphi_u(f)$ est un endomorphisme de $A_p(E)$. Comme d'après

le Théorème 10.2.2.5, $\dim(A_p(E)) = 1$, tout endomorphisme de $A_p(E)$ est une homothétie. Le rapport d'une homothétie dans un espace vectoriel non nul étant déterminé de façon unique, on voit qu'il existe bien un scalaire unique, noté $\det(u)$, indépendant de f et tel que l'on ait la formule (10.3.2.1).

10.3.2.2. Remarque

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base quelconque de E . Si on applique la relation (10.3.2.1), en prenant $f = \det_{\mathcal{B}}$, alors pour toute suite $(x_1, \dots, x_p)$ de E et pour tout endomorphisme u de E , on a

$$(10.3.2.2) \quad \det_{\mathcal{B}}(u(x_1), \dots, u(x_p)) = \det(u) \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_p).$$

Si en particulier on prend $(x_1, \dots, x_p) = (e_1, \dots, e_p)$, on obtient une expression du déterminant de u :

$$(10.3.2.3) \quad \det(u) = \det_{\mathcal{B}}(u(e_1), \dots, u(e_p)).$$

Rassemblons quelques propriétés du déterminant d'un endomorphisme dans un théorème.

10.3.2.3. Théorème

Soit E un K -espace vectoriel de dimension p . Alors :

a) $\det(\text{Id}_E) = 1$.

b) Pour tout endomorphisme u de E et pour tout $\lambda \in K$, on a

$$\det(\lambda u) = \lambda^p \det(u).$$

c) Quels que soient les endomorphismes u et v de E , on a

$$\det(vu) = (\det(v)) (\det(u)).$$

d) Un endomorphisme de E est inversible si et seulement si $\det(u) \neq 0$ et dans ce cas on a :

$$\det(u^{-1}) = (\det(u))^{-1}.$$

La démonstration est la même que celle du Théorème 10.1.4.3.

10.3.2.4. Corollaire

Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie. L'application $u \mapsto \det(u)$ est un homomorphisme du groupe linéaire $GL(E)$ sur le groupe multiplicatif K^ des éléments non nuls de K . Le noyau de cet homomorphisme, constitué des endomorphismes de E dont le déterminant est égal à 1 est un sous-groupe*

distingué de $GL(E)$, appelé groupe spécial linéaire ou groupe unimodulaire de E , et noté $SL(E)$.

C'est immédiat.

10.3.3. DÉTERMINANT D'UNE MATRICE CARRÉE

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq p}$ une matrice carrée d'ordre p à coefficients dans K . Les colonnes de A représentent des vecteurs $x_1, \dots, x_p$ de K^p rapporté à sa base canonique. Nous savons aussi que A peut être considérée comme la matrice d'un endomorphisme unique u de K^p rapporté à sa base canonique. Ceci nous amène à poser la définition suivante :

10.3.3.1. Définition

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre p à éléments dans K . On appelle **déterminant** de A , et on note $\det(A)$, le déterminant de ses vecteurs colonnes dans la base canonique de K^p .

Soit B la base canonique de K^p . Avec les notations précédentes, on a donc

$$(10.3.3.1) \quad \det(A) = \det_B(x_1, \dots, x_p) = \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(p),p} = \det(u).$$

Le déterminant de la matrice $A = (a_{ij})$ se note aussi

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & \dots & a_{pp} \end{vmatrix}$$

Les propriétés des déterminants des matrices carrées se déduisent des propriétés des déterminants des endomorphismes en utilisant l'isomorphisme canonique de l'algèbre $\mathcal{L}(K^p)$ des endomorphismes de l'espace vectoriel K^p sur l'algèbre $M_p(K)$ des matrices carrées d'ordre p à coefficients dans K . Nous obtenons ainsi le théorème suivant :

10.3.3.2. Théorème

- a) Le déterminant de la matrice unité I_p est égal à 1.
- b) Quelle que soit la matrice $A \in M_p(K)$ et quel que soit $\lambda \in K$, on a

$$\det(\lambda A) = \lambda^p \det(A).$$
- c) Pour tout couple (A, B) d'éléments de $M_p(K)$, on a

$$\det(AB) = \det(A) \det(B).$$

d) Pour qu'une matrice carrée A soit inversible, il faut et il suffit que son déterminant soit non nul ; on a alors :

$$\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}.$$

e) Si A et B sont deux matrices carrées d'ordre p semblables, on a

$$\det(A) = \det(B).$$

10.3.3.3. Corollaire

L'application $A \mapsto \det(A)$ est un homomorphisme du groupe linéaire $GL(p, K)$ sur le groupe multiplicatif K^* . Le noyau de cet homomorphisme, qui est l'ensemble des matrices carrées d'ordre p dont le déterminant est égal à 1, est un sous-groupe distingué de $GL(p, K)$, appelé groupe spécial linéaire ou groupe unimodulaire ; on le note $SL(p, K)$.

La démonstration est immédiate.

Voici encore un résultat important pour les applications.

10.3.3.4. Théorème

Le déterminant de la transposée d'une matrice est égal au déterminant de cette matrice.

Démonstration. Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre p . Posons ${}^tA = (b_{ij})$; on a $b_{ij} = a_{ji}$.

Nous avons par définition :

$$\det({}^tA) = \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma) b_{\sigma(1),1} \dots b_{\sigma(p),p} = \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \dots a_{p,\sigma(p)}.$$

Si on pose, pour tout $j \in \{1, \dots, p\}$, $i = \sigma(j)$, alors $a_{j,\sigma(j)} = a_{\sigma^{-1}(i),i}$ et $\varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma)$.

Mais puisque l'application $\sigma \mapsto \sigma^{-1}$ est une bijection de S_p sur lui-même, on peut écrire, en posant $\tau = \sigma^{-1}$,

$$\begin{aligned} \det({}^tA) &= \sum_{\sigma^{-1} \in S_p} \varepsilon(\sigma^{-1}) a_{\sigma^{-1}(1),1} \dots a_{\sigma^{-1}(p),p} \\ &= \sum_{\tau \in S_p} \varepsilon(\tau) a_{\tau(1),1} \dots a_{\tau(p),p} = \det(A). \end{aligned}$$

10.3.3.5. Corollaire

Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E . On a $\det({}^tu) = \det(u)$.

Ceci résulte du Théorème 10.3.3.4 en considérant les matrices de u et de ${}^t u$.

10.3.3.6. Remarque

Le théorème 10.3.3.4 montre que le déterminant des vecteurs colonnes d'une matrice A est égal au déterminant des vecteurs lignes de A . Il en résulte que toute propriété démontrée pour les colonnes d'un déterminant est également valable pour les lignes de ce déterminant. Nous parlerons de **rangées** pour désigner les lignes ou les colonnes d'un déterminant.

Voici maintenant quelques propriétés qui découlent du fait que le déterminant est une forme p -linéaire alternée.

10.3.3.7. Théorème

Soit A une matrice carrée d'ordre p .

- a) *Si deux rangées parallèles de A sont identiques ou proportionnelles, on a $\det(A) = 0$.*
- b) *Si l'on échange deux rangées parallèles de A , le déterminant de A change de signe ; plus généralement, si l'on fait subir aux rangées de A une permutation σ , le déterminant de A est multiplié par $\varepsilon(\sigma)$.*
- c) *Si l'on multiplie par le même scalaire λ tous les éléments d'une rangée de A , le déterminant de A est multiplié par λ .*
- d) *$\det(A)$ ne change pas si l'on ajoute à l'une de ses rangées une combinaison linéaire des autres rangées parallèles.*
- e) *$\det(A) = 0$ si et seulement si les vecteurs colonnes (resp. les vecteurs lignes) de A sont linéairement dépendants.*

10.3.3.8. Théorème

Soient E un K -espace vectoriel de dimension p et $B = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E .

- a) *Soient $x_1, \dots, x_p$ des vecteurs de E . Notons $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{pj}$ les coordonnées du vecteur x_j par rapport à la base B et A la matrice (a_{ij}) de type (p, p) . On a $\det_B(x_1, \dots, x_p) = \det(A)$.*
- b) *Soient u endomorphisme de E et $M(u)$ sa matrice par rapport à la base B . On a $\det(u) = \det(M(u))$.*

Démonstration. L'assertion a) résulte immédiatement des formules (10.2.2.3) et (10.3.3.1).

b) On a d'après (10.3.2.3) $\det(u) = \det_B(u(e_1), \dots, u(e_p))$ et d'après a) ce déterminant n'est autre que le déterminant de la matrice associée à u relativement à la base B .

Nous disposons, grâce à ce théorème, d'un moyen pour calculer effectivement le déterminant d'un endomorphisme.

10.3.4. CALCULS DES DÉTERMINANTS

Nous allons, dans ce numéro, apprendre à développer un déterminant suivant une colonne ou une ligne. Mais auparavant, nous allons établir les formules qui donnent le développement des déterminants de certaines matrices remarquables.

10.3.4.1. Théorème

Soit M une matrice carrée d'ordre p de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} A & : & B \\ & : & \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & : & C \\ & : & \end{pmatrix} \begin{matrix} \uparrow r \\ \\ \\ \downarrow p-r \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \leftarrow r & p-r \rightarrow \end{matrix}$$

où $A \in M_r(K)$, $B \in M_{r,p-r}(K)$, $C \in M_{p-r}(K)$ et où 0 est la matrice nulle de type $(p-r, r)$. Alors

$$(10.3.4.1) \quad \det(M) = \det(A) \det(C).$$

Démonstrations. Soient $B = (e_1, \dots, e_p)$ la base canonique de K^p , E le sous-espace vectoriel, de K^p engendré par $B' = (e_1, \dots, e_r)$ et F le sous-espace vectoriel de K^p engendré par $B'' = (e_{r+1}, \dots, e_p)$. Notons u l'endomorphisme de K^p admettant M pour matrice par rapport à la base B , v l'endomorphisme de E dont la matrice par rapport à la base B' est A et enfin w l'endomorphisme de F canoniquement associé à C .

Par définition du déterminant d'une matrice, on a

$$\det(M) = \det_B(u(e_1), \dots, u(e_p)).$$

On a évidemment

$$u(e_1) = v(e_1), \dots, u(e_r) = v(e_r),$$

d'où

$$\det(M) = \det_B(v(e_1), \dots, v(e_r), u(e_{r+1}), \dots, u(e_p)).$$

Il est clair que l'application $f : E^r \longrightarrow K$ définie par

$$f(x_1, \dots, x_r) = \det_B(x_1, \dots, x_r, u(e_{r+1}), \dots, u(e_p)),$$

est une forme r -linéaire alternée sur E . Par définition même du déterminant de l'endomorphisme v , nous avons :

$$f(v(e_1), \dots, v(e_r)) = \det(v) f(e_1, \dots, e_r),$$

d'où puisque $\det(v) = \det(A)$,

$$\det(M) = \det(A) \det_B(e_1, \dots, e_r, u(e_{r+1}), \dots, u(e_p)).$$

Or

$$u(e_{r+1}) = z_{r+1} + w(e_{r+1}), \dots, u(e_p) = z_p + w(e_p)$$

où les vecteurs $z_{r+1}, \dots, z_p$ sont dans E ; donc

$$\begin{aligned} \det_B(e_1, \dots, e_r, u(e_{r+1}), \dots, u(e_p)) &= \\ \det_B(e_1, \dots, e_r, z_{r+1} + w(e_{r+1}), \dots, z_p + w(e_p)). \end{aligned}$$

Ce dernier déterminant ne change si l'on retranche du vecteur colonne d'indice k ($r+1 \leq k \leq p$), le vecteur z_k qui est une combinaison linéaire de $e_1, e_2, \dots, e_r$. D'où

$$\begin{aligned} \det_B(e_1, \dots, e_r, u(e_{r+1}), \dots, u(e_p)) &= \\ \det_B(e_1, \dots, e_r, w(e_{r+1}), \dots, w(e_p)). \end{aligned}$$

En introduisant l'application $h : F^{p-r} \longrightarrow K$ définie par :

$$h(x_{r+1}, \dots, x_p) = \det_B(e_1, \dots, e_r, x_{r+1}, \dots, x_p),$$

et en utilisant un raisonnement analogue au précédent, on voit que

$$\begin{aligned} \det_B(e_1, \dots, e_r, w(e_{r+1}), \dots, w(e_p)) &= \\ \det(w) \det_B(e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_p) &= \det(w) \end{aligned}$$

puisque $\det_B(e_1, \dots, e_p) = 1$. Comme $\det(w) = \det(C)$, on obtient finalement

$$\det(M) = \det(A) \det(C).$$

10.3.4.2. Corollaire

Soit A une matrice carrée de la forme

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1p} \\ 0 & A_{22} & \dots & A_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_{pp} \end{pmatrix}$$

où les matrices A_{ii} sont des matrices carrées et où les matrices A_{ij} telles que $i > j$ sont nulles. Alors

$$(10.3.4.2) \quad \det(A) = \det(A_{11}) \det(A_{22}) \dots \det(A_{pp}).$$

En particulier, si

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & A_2 & \\ 0 & & A_p \end{pmatrix}$$

est une matrice diagonale de matrices carrées, on a

$$(10.3.4.3) \quad \det(A) = \det(A_1) \det(A_2) \dots \det(A_p).$$

La formule (10.3.4.2) découle du Théorème 10.3.4.1 en raisonnant par récurrence sur le nombre p de blocs diagonaux. La formule (10.3.4.3) s'en déduit aisément.

10.3.4.3. Corollaire

Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit des éléments diagonaux. En particulier, le déterminant d'une matrice diagonale est égal au produit des éléments diagonaux.

Il s'agit là de deux cas particulier de ceux traités dans le Corollaire 10.3.4.2.

10.3.4.4. Définition

Soit $A = (A_{ij})$ une matrice carrée d'ordre p . On appelle **mineur relatif à l'élément a_{ij}** , le déterminant de la matrice carrée A_{ij} , d'ordre $p - 1$, déduite de A en supprimant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne de A .

Le scalaire $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$ s'appelle le **cofacteur de a_{ij}** .

10.3.4.5. Théorème

Soient $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre $p > 1$ et Δ_{ij} le cofacteur de a_{ij} . Alors quels que soient les entiers i et j dans $\{1, \dots, p\}$, on a

$$(10.3.4.4) \quad \det(A) = \sum_{i=1}^p a_{ij} \Delta_{ij}$$

et

$$(10.3.4.5) \quad \det(A) = \sum_{j=1}^p a_{ij} \Delta_{ij}.$$

La formule (10.3.4.4) s'appelle le **développement de $\det(A)$ suivant la $i^{\text{ème}}$ colonne de A** ; la formule (10.3.4.5) s'appelle le **développement de $\det(A)$ suivant la $i^{\text{ème}}$ ligne de A** .

Démonstrations. Nous allons démontrer la formule (10.3.4.4) Comme $\det({}^t A) = \det(A)$, on en déduit la formule (10.3.4.5).

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ la base canonique de K^p ; désignons par $x_1, \dots, x_p$ les vecteurs colonnes de A . On a :

$$x_j = \sum_{i=1}^p a_{ij} e_i, \quad 1 \leq j \leq p,$$

et par définition

$$\det(A) = \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_p).$$

Comme $\det_{\mathcal{B}}$ est une forme p -linéaire alternée, on a

$$\begin{aligned} \det(A) &= (-1)^{j-1} \det_{\mathcal{B}}(x_j, x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_p) \\ &= (-1)^{j-1} \sum_{i=1}^p a_{ij} \det_{\mathcal{B}}(e_i, x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_p) \\ &= (-1)^{j-1} \sum_{i=1}^p a_{ij} \det_{\mathcal{B}}(A'_{ij}), \end{aligned}$$

où A'_{ij} est la matrice ayant pour vecteurs colonnes

$$e_i, x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_p.$$

Dans la matrice A'_{ij} , amenons la ligne de rang i à la première place en l'échangeant successivement avec les $i-1$ premières lignes ; il y a $i-1$ transpositions, d'où

$$\det(A'_{ij}) = (-1)^{i-1} \det(B_{ij})$$

où la matrice B_{ij} est de la forme

$$B_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & A_{ij} \end{pmatrix},$$

A_{ij} étant la matrice déduite de A en supprimant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne de A .

D'après le Théorème 10.3.4.1 et le fait que $\det(1) = 1$, on a

$$\det(B_{ij}) = \det(A_{ij}).$$

D'où

$$\begin{aligned} \det(A) &= (-1)^{j-1} \sum_{i=1}^p a_{ij} \det(A'_{ij}) = (-1)^{j-1} \sum_{i=1}^p a_{ij} (-1)^{i-1} \det(B_{ij}) \\ &= \sum_{i=1}^p (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) = \sum_{i=1}^p a_{ij} \Delta_{ij}. \end{aligned}$$

10.3.4.6. Remarque

Les formules (10.3.4.4) et (10.3.4.5) ramènent le calcul d'un déterminant d'ordre n au calcul d'un déterminant d'ordre $n - 1$ donc, par itérations successives, au calcul des déterminants d'ordre 3 et 2. Mais les calculs devenant assez pénibles lorsque l'ordre du déterminant est élevé, on a toujours intérêt, avant de développer un déterminant, à faire apparaître des zéros en ajoutant à une ligne (ou une colonne) une combinaison linéaire des autres lignes (ou des autres colonnes).

10.3.4.7. Exemples

Le développement suivant la première colonne du déterminant

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

donne

$$D = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

De même le développement suivant la première colonne du déterminant

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

donne

$$\begin{aligned} D &= a \begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix} - a' \begin{vmatrix} b & c \\ b'' & c'' \end{vmatrix} + a'' \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} \\ &= a(b'c'' - b''c') - a'(bc'' - b''c) + a''(bc' - b'c) \\ &= ab'c'' - ab''c' - a'bc'' + a'b''c + a''bc' - a''b'c. \end{aligned}$$

On dispose d'un moyen mnémotechnique – la règle de Sarrus – pour retrouver ce développement. On écrit

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix}$$

– Les éléments dont le produit doit être affecté du signe + sont ceux qui sont situés sur des «parallèles à la diagonale principale» (traits continus), et ceux dont le produit doit être affecté du signe – sont situés sur des «parallèles à la diagonale non principale» (traits pointillés).

– Le déterminant est égal à la somme de ces six termes.

10.3.4.8. Exemple

Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ une suite de n éléments de K ($n \geq 2$). On appelle **déterminant de VANDERMONDE** associé à la suite $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ le scalaire

$$V(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

On suppose évidemment que les α_i sont distincts deux à deux car sinon le déterminant est nul.

$V(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est un polynôme en α_1 , de degré $n - 1$, dont les zéros sont $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$, comme on le voit facilement en remplaçant dans V , α_1 par $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$. Donc il existe un scalaire λ non nul tel que :

$$V(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \lambda(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1) \dots (\alpha_n - \alpha_1).$$

En égalant les coefficients de α_1^{n-1} dans les deux membres de cette dernière égalité, on obtient

$$(-1)^{n+1} D = (-1)^{n-1} \lambda$$

où D est le mineur relatif à α_1^{n-1} dans $V(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. D est le déterminant de Vandermonde associé à la suite $(\alpha_2, \dots, \alpha_n)$. Donc

$$V(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = V(\alpha_2, \dots, \alpha_n) \prod_{i=2}^n (\alpha_i - \alpha_1).$$

Par récurrence, on en déduit

$$V(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_j - \alpha_i).$$