Chapitre 4 : APPROXIMATION POLYNÔMIALE D'UNE FONCTION

Introduction

Les polynômes font partie des fonctions les plus simples qu'on rencontre en analyse. Leurs valeurs en un point sont aisément calculables par des opérations algébriques élémentaires. Dans ce chapitre, on cherche à approcher une fonction par un polynôme ; et si la différence entre la fonction et son polynôme d'approximation est assez petite, alors en peut dans certains cas pratiques remplacer les calculs sur la fonction, par des calculs sur son polynôme associé.

Il existe plusieurs manières d'approcher une fonction par des polynômes, suivant l'usage qu'on veut faire de cette approximation. Dans certains cas, la fonction considérée est définie par une expression mathématique ou, plus fréquemment, par une suite de valeurs prises en des points distincts $x_i, f_i = f(x_i), i \in \{0, 1, 2 \ldots, n\}$ (f est dite alors échantillonnée ou discrétisée).

Pour de nombreuses questions, il est alors utile d'approcher f par une fonction *polynômiale P convenablement choisie* tel que $P(x_i) = f_i$, pour $i = 1, 2, \ldots, n$. Cette approche peut être réalisée soit sur un intervalle $[a, b]$, soit sur un voisinage d'un point x_0.

4.1. Approximation polynômiale sur $[a, b]$

4.1.1. Interpolation (méthode de Lagrange)

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[a, b]$. Connaissant les valeurs $f_0, \ldots, f_n$, de f aux points $x_0, \ldots, x_n$, de $[a, b]$ on cherche un polynôme P_n de degré n tel que

$$P_n(x_i) = f(x_i) \ ; \qquad i = 1 \ldots n.$$

Ces équations déterminent le polynôme P_n, appelé *polynôme de Lagrange*. En écrivant P_n sous la forme :

$$P_n(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) + a_1(x - x_0)(x - x_2) \cdots (x - x_n) \\ + \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})$$

on obtient le système d'équations :

$$P_n(x_0) = a_0(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\dots(x_0 - x_n) = f_0$$

$$\vdots$$

$$P_n(x_n) = a_n(x_n - x_0)(x_n - x_1)\cdots(x_n - x_{n-1}) = f_n$$

qui détermine les coefficients $a_0, a_1, \dots, a_n$.

En introduisant les polynômes

$$L_i(x) = \prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}.$$

On obtient $P_n(x)$ sous la forme :

$$\boxed{P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i L_i(x)}$$

Exemple — Donner l'interpolation parabolique ($n = 2$) *de* $f(x) = \sin x$ *sur* $[0, \frac{\pi}{2}]$. Soit $x_0 = 0, x_1 = \dfrac{\pi}{4}$ et $x_2 = \dfrac{\pi}{2}$. On a :

$$P_2(x_0) = f(0) = 0$$

$$P_2(x_1) = f(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$P_2(x_2) = f(\frac{\pi}{2}) = 1$$

d'où $$L_1(x) = -\frac{16}{\pi^2}x(x - \frac{\pi}{2})$$

$$L_2(x) = \frac{8}{\pi^2}x(x - \frac{\pi}{4})$$

et $$P_2(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(-\frac{16}{\pi^2})\cdot x\cdot(x - \frac{\pi}{2}) + \frac{8}{\pi^2}x(x - \frac{\pi}{4}).$$

4.2. Approximation polynômiale au voisinage d'un point x_0 : Polynôme de Taylor

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. On sait que si f est dérivable en x_0, elle peut être approchée au voisinage de x_0 par une fonction affine φ (un polynôme de degré 1) :

$$\varphi(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$$

avec,

$$f(x_0) = \varphi(x_0) \qquad \text{et} \qquad f'(x_0) = \varphi'(x_0).$$

Plus généralement on cherche, dans le cas où f est dérivable en x_0 jusqu'à l'ordre n, $n \geq 1$, un polynôme $P(x)$ de degré $\leq n$ tel que :

$$P(x_0) = f(x_0), \qquad P'(x_0) = f'(x_0), \dots \qquad P^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0).$$

En écrivant ce polynôme sous la forme

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n$$

on voit que la dérivée $k^{\text{ième}}$ de $P(x)$ s'écrit :

$$P(k)(x) = k!a_k + (x - x_0)v(x), \qquad v(x_0) \neq 0$$

d'où $P^{(k)}(x_0) = k!a_k = f^{(k)}(x_0)$. Le polynôme cherché s'écrit donc :

$$\boxed{P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(x_0)\frac{(x - x_0)^n}{n!}}$$

Ce polynôme est appelé *polynôme de Taylor* de degré $\leq n$ engendré par f au point x_0 et sera noté $P_n(x) = T_n f(x, x_0)$ ou $T_n f$ simplement.

4.2.1. Exemples

1) $f(x) = e^x$.

$$T_n f(x, o) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

2) $f(x) = \sin x$ *: on a* $f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$ *et* $f^{(2k)}(0) = 0$ *pour tout entier* k*. D'où*

$$T_{2n+1} f(x, 0) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

3) $f(x) = \cos x$*. On a de même*

$$T_{2n} f(x, 0) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

4.2.2. Remarques

1) Les formules suivantes, facilement vérifiables, permettent de calculer de nouveaux polynômes de Taylor, à partir d'autres, connus. Les polynômes de Taylor qui suivent sont engendrés au même point x_0.

a) Propriété de linéarité

$$T_n(\lambda f + \eta g) = \lambda T_n(f) + \eta T_n(g).$$

b) Propriété de différentiation

$$(T_n f)' = T_{n-1}(f').$$

c) Propriété d'intégration

La primitive de $T_n f$ qui s'annule pour $x = x_0$ est égale à $T_{n+1}(g)$, où g est la primitive de f qui s'annule pour $x = x_0$.

2) Soit P_n un polynôme de degré $n \geq 1$.

Soient f et g deux fonctions dérivables à l'ordre n telles que :

$$f(x) = P_n(x) + (x - x_0)^n g(x)$$

où $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ alors $T_n(f) = P_n(x)$.

4.2.3. Exemples

On sait que

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x} \text{ pour } x \neq 1$$

comme $\lim_{x \to 0} \frac{x^{n+1}}{1-x} = 0$, *d'après 4.2.2.2)*

$$T_n\left(\frac{1}{1-x}\right) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n \tag{1}$$

et d'après 4.2.2.c) $(1 - x > 0)$

$$T_{n+1}\left[-\ln(1-x)\right] = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \tag{2}$$

si dans (1) on remplace x par $-x^2$, on a :

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} - (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{1+x^2}$$

donc

$$T_{2n}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} \tag{3}$$

et d'après 4.2.2.c)

$$T_{2n+1}(\text{Arctg}\, x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}. \tag{4}$$

4.3. Formule de Taylor

Dans ce paragraphe nous examinons l'erreur dans l'approximation d'une fonction f par son polynôme de Taylor $T_n(f)$.

Soit $E_n(x) = f(x) - T_n f(x)$. Le théorème qui suit donne une expression de $E_n(x)$. C'est une généralisation du théorème des accroissements finis.

4.3.1. Théorème de Taylor

Théorème : soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On suppose, n étant un entier naturel donné, que f et ses dérivées f', f'', ..., $f^{(n)}$ sont définies et continues sur I, et $f^{(n+1)}$ est définie sur I.

Pour tout couple de points α, β de I il existe un réel γ, $\alpha < \gamma < \beta$ si $\alpha < \beta$, ou $\beta < \gamma < \alpha$ si $\beta < \alpha$ tel que :

$$\boxed{\begin{aligned} f(\beta) = f(\alpha) + \frac{\beta-\alpha}{1!}f'(\alpha) + \cdots \\ + \frac{(\beta-\alpha)^n}{n!}f^{(n)}(\alpha) + \frac{(\beta-\alpha)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\gamma) \end{aligned}} \qquad (1)$$

Démonstration — On pose :

$$R_{n+1}(x) = f(x) - \left[f(\alpha) + \frac{x-\alpha}{1!}f'(\alpha) + \cdots + \frac{(x-\alpha)^n}{n!}f^{(n)}(\alpha)\right]$$

on remarque que :

$$R_{n+1}(\alpha) = R'_{n+1}(\alpha) = \cdots = R^{(n)}_{n+1}(\alpha) = 0.$$

D'après le théorème des accroissements finis généralisé (3.4.3), il existe γ_1 compris entre α et β (ou entre β et α) tel que :

$$\begin{aligned} \frac{R_{n+1}(\beta)}{(\beta-\alpha)^{n+1}} &= \frac{R_{n+1}(\beta) - R_{n+1}(\alpha)}{(\beta-\alpha)^{n+1} - 0^{n+1}} \qquad (\text{si } \alpha < \beta\ ) \\ &= \frac{R_{n+1}(\alpha) - R_{n+1}(\beta)}{0^{n+1} - (\beta-\alpha)^{n+1}} = \frac{R'_{n+1}(\gamma_1)}{(n+1)(\gamma_1-\alpha)^n}. \end{aligned}$$

De même il existe γ_2 compris entre α et γ_1 ou entre γ_1 et α tel que

$$\begin{aligned} \frac{R_{n+1}(\beta)}{(\beta-\alpha)^{n+1}} = \frac{R'_{n+1}(\gamma_1)}{(n+1)(\gamma_1-\alpha)^n} &= \frac{R'_{n+1}(\gamma_1) - R'_{n+1}(\alpha)}{(n+1)(\gamma_1-\alpha)^n - 0^n} \qquad (\text{si } \alpha < \gamma_1) \\ &= \frac{R'_{n+1}(\alpha) - R'_{n+1}(\gamma_1)}{0^n - (n+1)(\gamma_1-\alpha)^n} \qquad (\text{si } \gamma_1 < \alpha) \\ &= \frac{R''_{n+1}(\gamma_2)}{n(n+1)(\gamma_2-\alpha)^{n-1}}. \end{aligned}$$

En itérant ce processus jusqu'à $n+1$ on aura

$$\frac{R_{n+1}(\beta)}{(\beta-\alpha)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(\gamma_{n+1})}{(n+1)!}$$

où γ_{n+1} est compris entre α et β ou β et α ; d'où la formule (1) du théorème.

4.3.2. Remarques

1) La formule (1) de 4.3.1 est appelée formule de Taylor (ou de Taylor-Lagrange) à l'ordre $n+1$ et le terme $R_{n+1} = \frac{(\beta-\alpha)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\gamma)$ est le reste de Lagrange.

2) Il en existe d'autres formes du reste. Mentionnons pour le moment la forme de Cauchy : il existe un nombre θ, $0<\theta<1$, tel que

$$R_{n+1} = (1-\theta)^n \frac{f^{(n+1)}((1-\theta)\alpha + \theta\beta)}{(n+1)!}(\beta-\alpha)^{n+1}$$

3) en posant $\beta = x$ la formule de Taylor s'écrit :

$$f(x) = T_n f(x,\alpha) + \frac{(x-\alpha)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\gamma)$$

où $T_n f(x,\alpha)$est le polynôme de Taylor associé à f, au point α.

4) en posant $x = \alpha + h$ et $\gamma = \alpha + \theta h$ $\quad 0<\theta<1$. On peut écrire :

$$f(x+h) = \sum_{p=0}^{n} \frac{h^p}{p!} f^{(P)}(\alpha) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\alpha+\theta h).$$

Si $\alpha = 0$ et $h = x$ on obtient la formule de Mac Laurin-Lagrange.

$$\boxed{f(x) = \sum_{p=0}^{n} \frac{x^p}{p!} f^{(P)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) \qquad 0<\theta<1}$$

5) si la dérivée d'ordre $(n+1)$de f satisfait les inégalités

$$m \leq f^{(n+1)}(t) \leq M$$

dans un intervalle contenant a, alors pour tout point x de cet intervalle on a les estimations suivantes du reste

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

$$m\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \leq R_{n+1}(x) \leq M\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{si } x > a$$

$$m\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \leq (-1)^{n+1} R_{n+1}(x) \leq M\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{si } x < a$$

Exemples

1) Calcul du nombre e.

Si $f(x) = e^x$ *et* $a = 0$ *on a :*

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{(\theta x)} .$$

Posons $R_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{(\theta x)}$. *Sur* $[0, 1]$ *on a* $1 \leq e^{(\theta x)} \leq e < 3$.
D'où

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \leq R_{n+1}(x) \leq \frac{3x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Pour $x = 1$ *on a :*

$$e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + R_{n+1}(1). \qquad \text{où} \qquad \frac{1}{(n+1)!} \leq R_{n+1}(1) < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Ceci nous permet de calculer le nombre e *avec une précision fixée à l'avance. Par exemple pour calculer* e *avec sept décimales exactes il suffit de choisir* n, *tel que:* $\frac{3}{(n+1)!} < \frac{1}{2}10^{-8}$: $n = 12$ *convient.*

2) Irrationalité de e.

D'après l'exemple 1) on a

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{3}{(n+1)!}$$

en multipliant par $n!$ *on obtient*

$$\frac{1}{n+1} \leq n!\,e - \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} < \frac{3}{n+1} \leq \frac{3}{4}. \qquad \text{si} \qquad n \geq 3 \qquad (1)$$

si e *était rationnel, on pourrait choisir* n *assez grand de sorte que* $n!\,e$ *soit un entier et comme* $\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}$ *est un entier. (1) exprime que la différence de ces deux entiers est un nombre positif qui ne peut excéder* $\frac{3}{4}$, *ce qui est impossible. Donc* e *est irrationnel.*

4.4. Développements limités

On a vu dans l'étude de la formule de Taylor que certaines fonctions peuvent être approchées par des polynômes.

Plus précisément, si $f, f', \dots, f^{(n)}$ sont définies et continues dans un voisinage de 0 et $f^{(n+1)}$ existe et est bornée dans ce voisinage, alors dans ce voisinage, $f(x)$ s'écrit sous la forme :

$$f(x) = P_n(x) + x^n \epsilon(x)$$

où $P_n(x) = T_n f(x)$ et $\epsilon(x) = \dfrac{x f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \epsilon(x) = 0$.

Les conditions entraînent que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{P_n(x)} = 1$. On dit alors que $f(x)$ et $P_n(x)$ sont équivalentes au voisinage de 0 : autrement dit, f et P_n ont la même configuration au voisinage de 0.

Nous allons dans ce paragraphe faire une étude systématique des fonctions équivalentes à des polynômes au voisinage d'un point. On dira alors qu'elles admettent un développement limité en ce point.

4.4.1. Infiniment petits et infiniment grands

Définitions — Soit f une fonction numérique de variable réelle, définie au voisinage de x_0 (éventuellement on peut avoir $x_0 = +\infty$ ou $x_0 = -\infty$).

— Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, on dira que $f(x)$ est infiniment petit (notation : $I.P$) au voisinage de x_0.

— Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$) on dira que $f(x)$ est un infiniment grand (notation : $I.G$) au voisinage de x_0.

— On dira que $f(x)$ et $g(x)$ sont deux $I.P.$ (resp. $I.G.$) simultanés au voisinage de x_0 si

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$$
$$(\text{resp. } \lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) = \infty).$$

— On dira que les deux $I.P.$ (resp. $I.G.$) $f(x)$ et $g(x)$ sont de même ordre au voisinage de x_0 s'il existe un réel différent de 0 tel que $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = a$. Si $a = 1$, on dira que f et g sont équivalentes au voisinage de x_0 (notation $f \sim g$).

Exemple : $(\sin x)^2$ et $3x^2$ sont deux $I.P.$ de même ordre au voisinage de 0.

Définitions — Lorsqu'on étudie des fonctions :

i) au voisinage de 0, x (resp. $\dfrac{1}{x}$) est appelé $I.P.$ principal (resp. $I.G.$ principal) ;

ii) au voisinage de l'infini : x (resp. $\dfrac{1}{x}$) est appelé $I.G.$ principal (resp. $I.P.$ principal) ;

iii) au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$: $(x - x_0)$. (resp. $\dfrac{1}{x - x_0}$) est appelé *I.P.* principal (resp. *I.G.* principal).

Si $f(x)$ est un *I.P.* (resp. *I.G.*) et α l'*I.P.* (resp. l'*I.G.*) principal, $f(x)$ dite d'ordre p par rapport à α si les deux *I.P.* (resp. *I.G.*) $f(x)$ et α^P sont de même ordre, c'est-à-dire si l'on a :

$$\lim \frac{f(x)}{\alpha^p} = a, \text{ avec } \qquad a \neq 0.$$

Dans ce cas, $f(x) \sim a\alpha^p$ et $a\alpha^p$ est dite partie principale de $f(x)$.

4.4.1.1. Exemples

i) $\sin(x - x_0)$ *est un I.P. d'ordre 1 par rapport à* $x - x_0$ *au voisinage de* x_0.

ii) $1 - \cos x$*est un I.P. d'ordre 2 par rapport à* x *au voisinage de* 0.

iii) Si $1 \leq p \leq n$, $b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_p x^p$ *est un I.G. (resp. I.P.) d'ordre* n *(resp. d'ordre* p*) relativement à* x *au voisinage de l'infini (resp. de* 0*), sa partie principale étant* $b_n x^n$ *(resp.* $b_P x^P$*).*

4.4.1.2. Remarque

Cette notion d'« ordre » d'une fonction ne s'applique pas à tous les *I.P.* (resp. *I.G.*). Par exemple a^x est un *I.G* au voisinage de $+\infty$, mais

$$\forall p \geq 1, \lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^p} = \begin{cases} 0 & \text{si } a \leq 1 \\ +\infty & \text{si } a > 1 \end{cases}$$

par suite on ne peut parler de son ordre.

La notion de développement limité d'une fonction au voisinage de x_0 généralise la notion d'ordre, dans la mesure où la fonction n'est pas nécessairement équivalente à une expression de la forme $a(x - x_0)^P$, mais à un polynôme en $x - x_0$.

4.4.1.3. Comparaison de fonctions

Définition — Soient $S \sim x_0$, $f : S \to \mathbb{R}$ et $g : S \to \mathbb{R}$ deux fonctions sur S. On dira que g est négligeable au voisinage de x_0 devant f et l'on notera $g = o(f)$ s'il existe une fonction ϵ définie sur S telle que $g(x) = f(x)\epsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \epsilon(x) = 0$.

Propriétés :

— Si $g = o(f)$ et $h = o(g)$, alors $f = o(h)$.

— Si $g = o(f)$ et si h est bornée alors $gh = o(f)$.

Exemples :

— $x^{n+1} = o(x^n)$ au voisinage de 0, si $n \in \mathbb{N}$.

— Si $\alpha > 0$, alors $\operatorname{Log} x = o(x^\alpha)$ au voisinage de $+\infty$.

— Si $p \in \mathbb{N}$, alors $x^p = o(e^x)$ au voisinage de $+\infty$.

4.4.2. Développements limités au voisinage de 0

4.4.2.1. Définition

Soit $f(x)$ une fonction numérique à variable réelle définie dans un voisinage de 0 (sauf peut-être en 0). On dira que $f(x)$ admet un développement limité (notation $D.L.$) d'ordre n au voisinage de 0 s'il existe un intervalle I de centre 0 et un polynôme P_n de degré $\leq n$ tel que pour tout $x \neq 0$, élément de I, on ait :

$$\boxed{f(x) = P_n(x) + \epsilon(x)x^n,}$$

où $\varepsilon : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifie : $\lim\limits_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$. $P_n(x)$ est appelé partie régulière du $D.L.$ et $\epsilon(x)x^n$ le reste (ou le terme complémentaire).

Dans toute la suite, la notation $\epsilon(x)$ ou $\epsilon_i(x)$ désigne un infiniment petit au voisinage de 0.

4.4.2.2. Propriétés

1) Si $f(x)$ admet un $D.L.$ au voisinage du 0, et si la partie régulière $P_n(x)$ est non nulle, alors $f(x)$ est équivalente à $P_n(x)$ au voisinage de 0. En effet si

$$P_n(x) = a_n x^n + \cdots + a_p x^p \qquad 0 \leq p \leq n \qquad (x^0 = 1)$$

on a :

$$\frac{f(x)}{P_n(x)} = 1 + \frac{x^n \epsilon(x)}{a_n x^n + \cdots + a_p x^p} = \frac{x^{n-p}\epsilon(x)}{a_n x^{n-p} + \cdots + a_p} + 1$$

et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^{n-p}\epsilon(x)}{a_n x^{n-p} + \cdots + a_p} = 0.$

<u>Remarque</u>: il faut s'assurer que le polynôme $a_n x^n + \cdots + a_p x^p$ est non nul. Par exemple si $f(x) = e^{-1/x^2}$, $f^{(k)}(0) = 0 \quad \forall k$, f admet un $D.L.$ d'ordre n pour tout $n \in \mathbb{N}$ ayant pour partie régulière le polynôme nul Θ. Cependant $f(x)$ est différent de 0 pour tout $x \in \mathbb{R}$, d'où $fx)$ n'est pas équivalent à Θ.

2) Si $f(x)$ admet un $D.L.$ d'ordre n au voisinage de 0, elle admet au voisinage du même point, un $D.L.$ d'ordre q, si $q < n$. Soit en effet

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + x^n \epsilon(x).$$

On peut écrire

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_q x^q + x^q \left[a_{q+1} x + \cdots + a_n x^{n-q} + x^{n-q}\epsilon(x)\right].$$

En posant $\epsilon_1(x) = a_{q+1} x + \cdots + a_n x^{n-q} + x^{n-q}\epsilon(x)$, on obtient

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_q x^q + \epsilon_1(x) x^q.$$

Ainsi si $P_n(x)$ est la partie régulière du $D.L.$ à l'ordre n de $f(x)$, on obtient la partie régulière du $D.L.$ à l'ordre q de $f(x)$ en supprimant les monômes de $P_n(x)$ de degré strictement supérieur à q : on dit qu'on a « tronqué » $P_n(x)$ à l'ordre q et on la notera $D_q(P_n(x))$.

3) Si $f(x)$ admet un $D.L.$ à l'ordre $n (n \geq 0)$ en $x = 0$, la fonction n'étant pas supposée définie en $x = 0$, on a $\lim_{x \to 0} f(x) = P_n(0)$, et l'on pourra prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = P_n(0)$.

Ainsi $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ n'a pas de $D.L.$ en 0, par contre $x \sin \frac{1}{x}$ admet un $D.L.$ d'ordre 0 au voisinage de 0 avec $P_0(0) = 0$.

4) Soit f une fonction définie au voisinage de 0 et continue en 0. Si f admet un $D.L.$ à l'ordre $n (n \geq 1)$ en 0, alors $f(x)$ est dérivable en 0 et $f'(0) = P_n'(0)$.

Ainsi $x \sin \frac{1}{x}$ n'admet pas de $D.L.$ en 0 d'ordre $n \geq 1$, par contre $x^2 \sin \frac{1}{x}$ admet un $D.L.$ d'ordre 1 en 0 avec $P_1(0) = 0$.

5) Si $f(x)$ admet un $D.L.$ d'ordre n en 0, alors sa partie régulière $P_n(x)$ est unique.

En effet si

$$\begin{aligned} f(x) &= P_n(x) + x^n \epsilon(x) \\ &= Q_n(x) + x^n \epsilon_1(x) \end{aligned}$$

avec $P_n(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ et $Q_n(x) = b_n x^n + \cdots + b_0$, on a :

$$a_n x^n + \cdots + a_0 + x^n \epsilon(x) = b_n x^n + \cdots + b_0 + x^n \epsilon_1(x) ;$$

en faisant tendre x vers 0, on obtient : $a_0 = b_0$: d'où en simplifiant par a_0 et en divisant par x les 2 membres on a :

$$a_n x^{n-1} + \cdots + a_1 + x^{n-1} \epsilon(x) = b_n x^{n-1} + \cdots + b_1 + x^{n-1} \epsilon_1(x).$$

on montre comme ci-dessus que $a_1 = b_1$.

En répétant ce processus on démontre que $a_i = b_i$ pour $i = 0, \ldots, n$.

Application

— Si $f(x)$ est une fonction paire les termes de degré impair dans $P_n(x)$ sont nuls. En effet si f est paire, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= P_n(x) + x^n \epsilon(x) \\ f(-x) &= P_n(-x) + x^n \left[(-1)\epsilon(x)\right] \\ &= P_n(-x) + x^n \epsilon_1(x) \end{aligned}$$

De $P_n(x) = P_n(-x)$ on déduit le résultat.

— De même si f est impair, les termes de degré paire dans $P_n(x)$ sont nuls.

4.4.2.3. Développements limités obtenus à partir de la formule de Mac-Laurin

a) Si $f, f' \dots f^{(n)}$ sont définies et continues dans un voisinage V_0 de 0 et si $f^{(n+1)}$ est définie et bornée dans V_0, d'après la formule de Mac-Laurin on a :

$$f(x) = T_n f(x, o) + x^n \epsilon(x)$$

où $\epsilon(x) = \dfrac{x}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x)$.

Par suite f admet un $D.L.$ d'ordre n en 0 et sa partie régulière n'est autre que son polynôme de Taylor à l'ordre n en 0. On dira que le $D.L.$ *de f à l'ordre n est obtenu à partir de la formule de Mac- Laurin.*

b) On suppose que f admet un $D.L.$ à l'ordre n obtenu par la formule de Mac-Laurin. La fonction dérivée $g = f'$ vérifie les hypothèses de a) à l'ordre $n-1$ d'où

$$g(x) = g(0) + xg'(0) + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} g^{(n-1)}(0) + x^{n-1}\epsilon_1(x).$$

En revenant à f :

$$f'(x) = f'(0) + xf''(0) + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(0) + x^{n-1}\epsilon_1(x)$$

On peut donc conclure : si f admet un $D.L.$ d'ordre n, f' admet un $D.L.$ d'ordre $n-1$ et sa partie régulière est obtenue par dérivation de la partie régulière du $D.L.$ de f. On retrouve la formule $(T_n f)' = T_n f'$ (Remarques 4.2.2 b).

De même toute primitive F de f vérifie les hypothèses de a) à l'ordre $n+1$, d'où

$$F(x) = F(0) + xF'(0) + \cdots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} F^{(n+1)}(0) + x^{n+1}\epsilon_2(x).$$

En revenant à f :

$$F(x) = F(0) + xf(0) + \frac{x^2}{2} f'(0) + \cdots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n)}(0) + x^{n+1}\epsilon_2(x)$$

donc : si f admet un $D.L.$ d'ordre n, toute primitive F de f admet un $D.L.$ d'ordre $n+1$ et sa partie régulière est la primitive de la partie régulière de f qui pour $x = 0$ prend la valeur $F(0)$. On retrouve la propriété c) de 4.2.2.

4.4.2.4. Exemples

D'après les exemples 4.2.3, on a :

1) $$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n\epsilon(x)$$

on en déduit par dérivation :

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x + \cdots + nx^{n-1} + x^{n-1}\epsilon_1(x)$$

2) de $$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + x^n\epsilon(x)$$

on déduit par intégration :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} + x^{n+1}\epsilon_2(x)$$

3) de $$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + x^{2n}\epsilon_3(x)$$

on déduit par intégration :

$$\operatorname{Arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+1}\epsilon_4(x)$$

4) on obtiendra de

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1}\epsilon_5(x)$$

le *D.L.* de :

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n}\epsilon_6(x)$$

5) Soit $\alpha \in Q$ et $f(x) = (1+x)^\alpha$.

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}. \qquad f'(0) = \alpha.$$
$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}. \qquad f''(0) = \alpha(\alpha-1).$$
$$\vdots$$
$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))\,(1+x)^{\alpha-n}.$$
$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1).$$

d'où

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+x^n\epsilon(x).$$

avec $\lim\limits_{x\to 0}\epsilon(x) = 0$.

6) En intégrant les développements de $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, obtenus en appliquant 5), on obtient :

$$\operatorname{Arcsin} x = x + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+1}\epsilon_1(x)$$

$$\operatorname{Argsh} x = x + \frac{x^3}{6} + \cdots + (-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+1}\epsilon_1(x)$$

4.4.3. Opérations sur les développements limités

Si f (resp. g) admet un $D.L.$ d'ordre p (resp d'ordre q) alors f et g admettent un $D.L.$ d'ordre $n = \min(p, q)$. On supposera dans la suite que f et g admettent un $D.L.$ de même ordre.

4.4.3.1. Somme

Soient

$$f(x) = P_n(x) + x^n \epsilon(x), \qquad \text{avec } \lim_{x \to 0} \epsilon(x) = 0$$

et

$$g(x) = Q_n(x) + x^n \epsilon_1(x), \qquad \text{avec } \lim_{x \to 0} \epsilon_1(x) = 0.$$

On a :

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= P_n(x) + Q_n(x) + x^n (\epsilon(x) + \epsilon_1(x)) \\ &= P_n(x) + Q_n(x) + x^n \epsilon_2(x) \qquad \text{avec } \lim_{x \to 0} \epsilon_2(x) = 0. \end{aligned}$$

D'où : *si $f(x)$ et $g(x)$ admettent un $D.L.$ d'ordre n au voisinage de 0, $f(x) + g(x)$ admet un $D.L.$ d'ordre n au voisinage de 0, dont la partie régulière est la somme des parties régulières des $D.L.$ de $f(x)$ et $g(x)$.*

Exemple :

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^x &= 1 + x + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n \epsilon_1(x) \\ \mathrm{e}^{-x} &= 1 - x + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + x^n \epsilon_2(x) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} &= 2 + 2\left(\frac{x^2}{2!}\right) + \cdots + 2\left(\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right) + x^n \epsilon_3(x) \\ \operatorname{ch} x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^n \epsilon_4(x). \end{aligned}$$

4.4.3.2. Produit

Si dans un polynôme $P(x)$ de degré $\leq n$ on supprime les termes de degré $> q$, on obtient un polynôme $Q(x)$ de degré $\leq q$: on dit que l'on a tronqué $P(x)$ à l'ordre q, et on écrit: $Q(x) = D_q\left(P(x)\right)$.

Soient

$$f(x) = P_n(x) + x^n \epsilon(x), \qquad \text{avec } \lim_{x \to 0} \epsilon(x) = 0$$

et

$$g(x) = Q_n(x) + x^n \epsilon_1(x), \qquad \text{avec } \lim_{x \to 0} \epsilon_1(x) = 0.$$

On a :

$$f(x)g(x) = P_n(x)Q_n(x) + x^n \left(\epsilon(x)Q_n(x) + \epsilon_1(x)Q_n(x) + x^n \epsilon_1(x)\right).$$

Si on pose

$$C_n(x) = D_n\,(P_n(x)Q_n(x))$$

on a :

$$f(x)g(x) = C_n(x) + x^n\epsilon_2(x), \qquad \text{avec } \lim_{x\to 0}\epsilon_2(x) = 0.$$

D'où : *si $f(x)$ et $g(x)$ admettent un D.L. d'ordre n au voisinage de 0, alors $f(x)\,g(x)$ admet un D.L. d'ordre n au voisinage de 0, dont la partie régulière est égale au produit des parties régulières de $f(x)$ et $g(x)$, tronquée à l'ordre n.*

Exemple : *Donner un D.L. de $f(x) = (x^3 + x^2 + 1)\ln(1 + x)$ à l'ordre 4*

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + x^4\epsilon_1(x)$$

d'où

$$f(x) = D_4\left[(1 + x^2 + x^3)(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4})\right] + x^4\epsilon_2(x)$$

$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{4x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + x^4\epsilon_2(x).$$

4.4.3.3. Quotient

$f(x) = P_n(x) + x^n\epsilon(x)$;

$g(x) = Q_n(x) + x^n\epsilon_1(x)$, avec $\lim_{x\to 0} g(x) = Q_n(0) \neq 0$.

On peut diviser $P_n(x)$ par $Q_n(x)$ à l'ordre n, suivant les puissances croissantes :

$$P_n(x) = Q_n(x)D_n(x) + x^{n+1}R(x) \qquad \text{avec degré } D_n(x) \leq n.$$

D'où

$$f(x) = (g(x) - \epsilon_1(x)x^n)\,D_n(x) + x^{n+1}R(x) + x^n\epsilon(x)$$
$$\Rightarrow f(x) = g(x)D_n(x) + x^n\epsilon_2(x).$$
$$\Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = D_n(x) + x^n\epsilon_3(x).$$

Si $f(x)$ et $g(x)$ admettent un D.L. d'ordre n au voisinage de 0, et si $\lim_{x\to 0} g(x) \neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ admet un D.L. d'ordre n au voisinage de 0, dont la partie régulière s'obtient en divisant suivant les puissances croissantes à l'ordre n, la partie régulière du D.L. de f par la partie régulière du D.L. de g.

Exemples :

1)

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^5\epsilon(x)$$
$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^5\epsilon_1(x)$$

d'où

$$\operatorname{th} x = x + \frac{x^3}{3} - \frac{2x^5}{15} + x^5\epsilon_2(x)$$

2)

$$\begin{aligned}
\sin x &= x - \frac{x^3}{6} + x^3\epsilon_1(x)\\
\operatorname{Log}(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\epsilon_2(x)\\
\frac{\sin x}{\operatorname{Log}(1+x)} &= \frac{x - \frac{x^3}{6} + x^3\epsilon_1(x)}{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\epsilon_2(x)}\\
&= \frac{1 - \frac{x^2}{6} + x^2\epsilon_1(x)}{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + x^2\epsilon_2(x)}\\
&= 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + x^2\epsilon(x).
\end{aligned}$$

4.4.3.4. Développement limité d'une fonction composée

On considère une fonction $u(x)$ admettant un $D.L.$ au voisinage de 0 d'ordre n, avec $\lim_{x\to 0} u(x) = 0$, et une fonction $f(u)$ admettant au voisinage de $u = 0$ un $D.L.$ d'ordre n :

$$u(x) = B_n(x) + x^n\epsilon_1(x), \qquad B_n(0) = 0.$$
$$f(u) = a_0 + a_1 u + \cdots + a_n u^n + u^n\epsilon(u).$$

Posons : $F(x) = f(u(x))$; on a :

$$F(x) = a_0 + a_1\left(B_n(x) + x^n\epsilon_1(x)\right) + \cdots + a_n\left(B_n(x) + x^n\epsilon_1(x)\right)^n + \left(B_n(x) + x^n\epsilon_1(x)\right)^n\epsilon(u(x)) \quad (1)$$

On montre par récurrence, en tenant compte de $B_n(0) = 0$, que :

$$\left(B_n(x) + x^n\epsilon_1(x)\right)^k = \left(B_n(x)\right)^k + x^n\epsilon_k(x), \qquad \text{avec } \lim_{x\to 0}\epsilon_k(x) = 0$$

le terme complémentaire de (1) devient

$$(B_n(x) + x^n\epsilon_1(x))^n\,\epsilon\,(u(x)) = (B_n(x))^n\,\epsilon\,(u(x)) + x^n\epsilon_n(x)\epsilon\,(u(x)) \tag{2}$$

comme $B(0) = 0$, alors $(B_n(x))^n = x^n Q(x)$ et

$$(B_n(x))^n\,\epsilon\,(u(x)) = x^n Q(x)\epsilon(u(x))$$

et comme $\lim\limits_{x\to 0}\epsilon\,(u(x)) = 0$, on peut écrire :

$$(B_n(x) + x^n\epsilon_1(x))^n\,\epsilon\,(u(x)) = x^n\epsilon'(x). \qquad \text{avec } \lim_{x\to 0}\epsilon'(x) = 0.$$

Finalement (1) s'écrit sous la forme :

$$F(x) = a_0 + a_1 B_n(x) + a_2\,(B_n(x))^2 + \cdots + a_n\,(B_n(x))^n + x^n\epsilon''(x) \tag{3}$$

avec $\lim\limits_{x\to 0}\epsilon''(x) = 0$. D'où :

$$F(x) = P_n(x) + x^n\epsilon'''(x). \tag{4}$$

où $P_n(x) = D_n\left(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k\,(B_n(x))^k\right)$ et $\lim\limits_{x\to 0}\epsilon'''(x) = 0$.

D'où la règle : La partie régulière du D.L. de $F(x)$ s'obtient en remplaçant u, dans la partie régulière du D.L. de $f(x)$, par la partie régulière du D.L. de $u(x)$, le tout tronqué à l'ordre n.

Exemple 1— *Développement limité d'ordre 3 de* $F(x) = \sqrt{1 + \ln(1+x)}$

Posons $u(x) = \ln(1+x)$

$f(u) = \sqrt{1+u}$

$$u(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \epsilon_1(x)x^3 = B_3(x) + x^3\epsilon_1(x)$$

$$f(u) = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + \frac{u^3}{16} + u^3\epsilon_1(u)$$

$$\text{d'où } F(x) = D_3\left(1 + \frac{B_3(x)}{2} - \frac{(B_3(x))^2}{8} + \frac{(B_3(x))^3}{16}\right) + x^3\epsilon(x)$$

$$\boxed{F(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{3x^2}{8} + \frac{17x^3}{48} + x^3\epsilon(x)}$$

Exemple 2— *Développement limité à l'ordre 4 de* $G(x) = \operatorname{Log}\cos x$.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^4\epsilon_1(x) = 1 + u(x).$$

avec $u(x) = -\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^4\epsilon_1(x)$

d'où $G(x) = \text{Log}\,(1 + u(x))$: $\quad \lim_{x \to 0} u(x) = 0$.

En appliquant la règle du D.L. d'une fonction composée à $G(x) = g(u(x))$ avec $g(u) = \ln(1+u)$, on obtient :

$$\boxed{\text{Log}\cos x = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + x^4\epsilon_3(x)}$$

4.4.4. Développements limités aux voisinages de $x_0 \neq 0$, et de l'infini

4.4.4.1. Définition

Une fonction $f(x)$ admet un *D.L.* d'ordre n au voisinage de x_0, si la fonction $F(x) = f(x - x_0)$ admet un *D.L.* d'ordre n au voisinage de 0.

Remarque: si $f(x)$ admet un *D.L.* d'ordre n, on a :

$$F(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \epsilon_1(x)x^n, \quad \text{avec } \lim_{x \to 0} \epsilon_1(x) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n\epsilon_1(x - x_0) \\ \lim\limits_{x \to x_0} \epsilon_1(x - x_0) = 0 \end{array}}$$

D'où : f admet un *D.L.* d'ordre n au voisinage de x_0 si et seulement si

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n\epsilon_1(x - x_0),$$
$$\text{avec } \lim_{x \to x_0} \epsilon_1(x - x_0) = 0.$$

Exemple : *Donner le D.L. à l'ordre 3 de $f(x) = e^x$ au voisinage de $x_0 = 1$.*

$F(x) = f(1 + x) = e^{1+x}$.

$$e^{1+x} = e\,e^x = e\left[1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + x^3\epsilon_1(x)\right]$$

$$\text{d'où } e^x = e\left[1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{(x-1)^3}{3!} + (x-1)^3\epsilon_1(x-1)\right].$$

4.4.4.2. Définition

Une fonction $f(x)$ admet un *D.L.* d'ordre n au voisinage de l'infini, si la fonction $F(x) = f(\frac{1}{x})$ admet un *D.L.* d'ordre n au voisinage de 0. S'il en est ainsi on a :

$$F(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + x^n\epsilon(x), \qquad \text{avec } \lim_{x \to 0} \epsilon(x) = 0$$

d'où

$$\boxed{f(x) = b_0 + \frac{b_1}{x} + \cdots + \frac{b_n}{n} + \frac{1}{x^n}\epsilon(\frac{1}{x}). \qquad \text{avec } \lim_{x\to\infty} \epsilon(\frac{1}{x}) = 0}$$

Exemple: *D.L. de* $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+2x}$ *d'ordre 2 au voisinage de l'infini.*

$$F(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1-x^2}{1+2x}$$

$$F(x) = (1-x^2)\left(1-2x+4x^2+x^2\epsilon(x)\right)$$

$$F(x) = 1-2x+3x^2+x^2\epsilon(x).$$

d'où $f(x) = 1 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{1}{x^2}\epsilon\left(\dfrac{1}{x}\right).$

4.4.5. Généralisation des développements limités

Soit $f(x)$ une fonction définie au voisinage de 0 (sauf peut être en 0). On suppose que $f(x)$ n'admet pas de *D.L.* au voisinage de 0, mais qu'il existe $k > 0$ tel que $\Phi(x) = x^k f(x)$ admet un *D.L.* au voisinage de 0. Dans ce cas:

$$x^k f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + x^n\epsilon(x). \qquad \text{avec } \lim_{x\to 0}\epsilon(x) = 0;$$

d'où

$$\boxed{f(x) = x^{-k}\left[a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + x^n\epsilon(x)\right].}$$

L'expression ainsi obtenue de $f(x)$ au voisinage de 0 s'appelle *D.L. généralisé de $f(x)$ au voisinage de* 0.

Exemples: *1) D.L. généralisé de* $f(x) = \dfrac{1}{x-x^2}$ *au voisinage de* 0.

$f(x)$ n'admet pas de D.L. au voisinage de 0 ($\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$) *: par contre* $xf(x) = \dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^3\epsilon(x)$, *où* $\lim_{x\to 0}\epsilon(x) = 0$ *;*
d'où

$$f(x) = \frac{1}{x}\left[1 + x + x^2 + x^3 + x^3\epsilon(x)\right].$$

2) D.L. généralisé de $f(x) = \operatorname{cotg} x$ *au voisinage de* 0. *$f(x)$ n'admet pas de D.L. au voisinage de* 0 ($\lim_{x\to 0^+}\operatorname{cotg} x = +\infty$), *par contre*

$$x\operatorname{cotg} x = \frac{x\cos x}{\sin x} = \frac{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^4\epsilon_1(x)}{1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + x^4\epsilon_2(x)}$$

$$\Rightarrow x\operatorname{cotg} x = 1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45} + x^4\epsilon_3(x). \text{où } \lim_{x\to 0}\epsilon 3(x) = 0 \ :$$

d'où

$$\operatorname{cotg} x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + x^3\epsilon_3(x)$$

3) D.L. généralisé de $f(x) = \sqrt[3]{x^2(x-1)}$ au voisinage de l'infini : en posant $X = \frac{1}{x}$, on se ramène au voisinage de 0.

$$F(X) = f(\frac{1}{X}) = \sqrt[3]{\frac{1}{X^2}(\frac{1}{X} - 1)} = \sqrt[3]{\frac{1}{X^3}(1 - X)} = \frac{1}{X}(1 - X)^{\frac{1}{3}}.$$

$XF(X)$ admet un D.L. limité au voisinage de 0. A l'ordre 2 on obtient :

$$XF(X) = 1 - \frac{1}{3}X - \frac{1}{9}X^2 + X^2\epsilon(X)$$

$$F(X) = \frac{1}{X} - \frac{1}{3} - \frac{1}{9}X + X\epsilon(X)$$

$$f(x) = x - \frac{1}{3} - \frac{1}{9x} + \frac{1}{x}\epsilon\left(\frac{1}{x}\right).$$

Le graphe de f admet une asymptote d'équation $y = x - \dfrac{1}{3}$; de plus $f(x) - y$ est équivalent à $-\dfrac{1}{9x}$ au voisinage de l'infini. D'où :

$$f(x) - y < 0 \qquad \text{si } x \to +\infty.$$
$$f(x) - y > 0 \qquad \text{si } x \to -\infty.$$

Ces inégalités déterminent la position du graphe de f par rapport à l'asymptote.

4.4.6. Application des développements limités

4.4.6.1. Recherche des limites

Lorsque la règle de l'Hôpital ne donne pas de résultats immédiats, on utilise alors les *D.L.* pour trouver les limites éventuelles des formes indéterminées.

Exemple 1 : *Trouver* $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x} - \operatorname{cotg} x\right)$

On a vu dans 4.5.5. exemple 3 que $\operatorname{cotg} x = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{3} - \dfrac{x^3}{45} + x^3\epsilon_3(x)$

$$\textit{d'où} \qquad \frac{1}{x} - \operatorname{cotg} x = \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + x^3\epsilon_3(x)$$

$$\textit{et} \qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \operatorname{cotg} x\right) = 0.$$

Exemple 2 : *Trouver* $\lim_{x\to 1}(2-x)^{\frac{1}{\sin \pi x}}$ *(forme* 1^{∞}*).*

On se ramène au voisinage de 0 en posant $x = 1 + X$

$$
\begin{aligned}
f(1+X) = (1-X)^{\frac{1}{\sin \pi(1+X)}} &= (1-X)^{-\frac{1}{\sin \pi X}} \\
&= e^{-\frac{\ln(1-X)}{\sin \pi X}} \\
&= e^{-\frac{-X + X\epsilon_1(X)}{\pi X + X\epsilon_2(X)}}
\end{aligned}
$$

d'où

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{X\to 0} f(1+X) = e^{\frac{1}{\pi}}$$

Exemple 3 : *Trouver* $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln \cos ax}{\ln \cos bx}$

D'après 4.4.3.4 exemple 2

$$
\begin{aligned}
\ln \cos ax &= -\frac{a^2x^2}{2} + x^2\epsilon_1(x) \\
\ln \cos bx &= -\frac{b^2x^2}{2} + x^2\epsilon_1(x)
\end{aligned}
$$

d'où $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln \cos ax}{\ln \cos bx} = \frac{a^2}{b^2}$$

4.4.6.2. Étude locale d'une fonction

Le développement limité d'une fonction au voisinage d'un point permet une étude locale de la fonction et donne des renseignements sur la forme de la courbe représentative.

Soit le $D.L.$ de f en x_0 :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n\epsilon(x)$$

dans lequel $a_n(x - x_0)^n$ représente le premier terme non nul, après celui du premier degré. On a alors les renseignements suivants : 1) L'équation de la tangente en M_0 $(x_0, f(x_0))$ est :

$$y = a_0 + a_1(x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

2) Au voisinage de x_0, on a : $f(x) - y \sim a_n(x - x_0)^n$, c'est-à-dire :

$$\overline{HM} \sim a_n(x - x_0)^n.$$

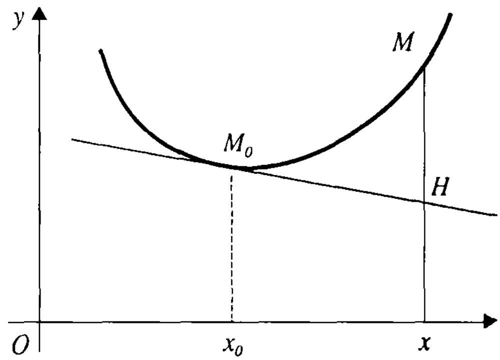

FIGURE: 4.4.6.2A

D'où :

a) Si n est paire, $\overline{HM}$ est du signe de a_n et la courbe reste localement du même côté de la tangente (M_0H) (Fig.4.4.6.2B).

b) Si n est impair, $\overline{HM}$ change de signe avec $x - x_0$ et la courbe traverse localement la tangente : M_0 est un point d'inflexion (Fig.4.4.6.2C).

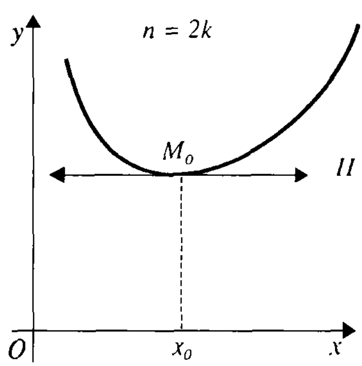

FIGURE: 4.4.6.2B

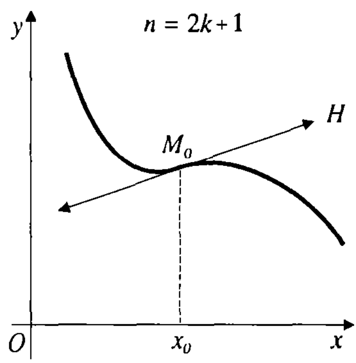

FIGURE: 4.4.6.2C

Plus n est grand et plus la courbe reste localement proche de sa tangente en M_0.

3) Si le développement limité généralisé de f au voisinage de l'infini est de la forme:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_n\frac{1}{x^n}\epsilon\left(\frac{1}{x}\right).$$

Dans ce cas $y = a_0 + a_1x$ est l'équation de l'asymptote et le signe de $\dfrac{a_n}{x^n}$ donne la position de la courbe par rapport à l'asymptote (4.4.5)

4.5. À RETENIR

1) Si $f, f' \dots f^{(n)}$ sont définies et continues sur $[a, b]$ et $f^{(n+1)}$ définie sur $]a, b[$, il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

2) f admet un $D.L.$ à l'ordre n au voisinage de 0, si pour tout point x d'un voisinage de 0 on a :

$$f(x) = P_n(f, x) + x^n\epsilon(x)$$

$P_n(f, x)$ est un polynôme en x de degré $\leq n$ et $\epsilon(x)$ un infiniment petit avec x.

— Propriétés : si f et g admettent un $D.L.$ à l'ordre n :

$$P_n(f+g, x) = P_n(f, x) + P_n(g, x)$$
$$P_n(fg, x) = D_n\left[P_n(f, x) \times P_n(g, x)\right]$$

Si $g(0) \neq 0$

$$P_n(\frac{f}{g}, x) = Q_n(x)$$

où $Q_n(x)$ est obtenue par division à l'ordre n de $P_n(f, x)$ par $P_n(g, x)$ suivant les puissances décroissantes.

Si $g(0) = 0$

$$P_n(f \circ g, x) = D_n\left[P_n\left(f, P_n(g, x)\right)\right].$$

3) Dans le $D.L.$ de f au voisinage de x_0 (ou de l'infini).

— les termes du premier degré donnent l'équation de la tangente (ou de l'asymptote).

— le signe du terme suivant précise la position de la courbe.

4.6. Exercices et problèmes

1) Montrer que :

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} \qquad \text{si } x \geq 0.$$
$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

2) Trouver le développement limité à l'ordre 6 au voisinage de 0 de

$$f(x) = 1 - \cos x + \operatorname{Log}(\cos x).$$

Montrer que la fonction $g : x \to \dfrac{f(x)}{x^4}$ peut être prolongée par continuité en 0.

Quelle est la forme du graphe de g au voisinage de 0?

3) En utilisant un développement limité approprié, calculer les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2(\operatorname{tg} x - \sin x) - x^2}{x^5}$;

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \operatorname{Log}\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$.

4) Montrer que la fonction définie par $f(x) = x^3 \operatorname{Log} x$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ admet un développement limité d'ordre 2 mais n'admet pas de développement limité d'ordre 3 au voisinage de 0.

5) En utilisant la formule de Mac-Laurin, calculer $\sqrt{e}$ à 0,0001 près.

6) a) Déterminer a et b pour que

$y = \sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 + 1} + a + \frac{b}{x}$

soit un infiniment petit d'ordre le plus grand possible par rapport à l'infiniment petit principal $\frac{1}{x}$ au voisinage de $+\infty$. Préciser alors l'ordre et la partie principale de y.

b) Donner un équivalent au voisinage de l'infini de

$f(x) = x\left(\sqrt{x^2 + \sqrt[4]{x^4 + 1}} - x\sqrt{2}\right)$.

7) On considère la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par

$f(x) = \operatorname{Log}(1 + x)$

a) Soit $x \neq 0$; montrer en appliquant le théorème des accroissements finis à cette fonction sur l'intervalle $[0, x]$, qu'il existe un nombre réel

$\theta(x) = -1 + \dfrac{x}{\operatorname{Log}(1 + x)}$.

b) On considère la fonction $x \to \theta(x)$. Ecrire le développement limité de cette fonction à l'ordre 2 au voisinage de 0.

c) Montrer que θ peut être prolongée par continuité sur l'intervalle $]-1, +\infty[$. On désigne encore par θ le prolongement obtenu. Calculer, s'ils existent les nombres $\theta'(0)$ et $\theta''(0)$.

8) a) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable jusqu'à l'ordre n, $(n \geq 1)$.

Montrer que, si f s'annule en $(n + 1)$ points distincts de $[a, b]$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

b) Soit $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable sur $]0, 1[$ et soit x fixé dans $]0, 1[$. Trouver un polynôme de degré 3 et une constante λ telle que la fonction h définie par

$$h(t) = g(t) - p(t) - \lambda t\left(t - \frac{x}{2}\right)(t - x)$$

vérifie : $h(0) = 0$, $h\left(\frac{x}{2}\right) = 0$; $h(x) = 0$, $h'\left(\frac{x}{2}\right) = 0$.

c) En déduire qu'il existe $c \in]0, x[$ tel que

$$g(x) = g(0) + xg'\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x^3}{24}g'''(c).$$

9) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^{x^2} - 1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

Montrer que f admet une application réciproque $g = f^{-1}$ et que g admet un développement limité d'ordre 5 au voisinage de 0 que l'on précisera.

10) a) En considérant les fonctions définies par :

$$f(x) = \text{Log}\,(1 + x^2) \qquad \text{et} \qquad g(x) = \text{Log}\,(1 + x),$$

montrer que si deux fonctions sont équivalentes au voisinage d'un point, leurs logarithmes ne le sont pas nécessairement.

b) Montrer que si les *infiniments petits* y et z sont équivalents, les infiniments grands $\text{Log}\, y$ et $\text{Log}\, z$ le sont aussi.

c) Même question pour z et y infiniment grands.

11) a) Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$. On suppose que $f'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$. Montrer que f est indéfiniment dérivable sur I.

b) On suppose qu'il existe $a \in I$ tel que $f(a) = 0$. En utilisant la formule de Taylor, montrer que $f(x) = 0$ pour tout $x \in I$.

c) Déduire de b) qu'il existe au plus une fonction vérifiant les hypothèses de a) telle que $f(0) = 1$.

d) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction qui vérifie les hypothèses de a) et telle que $f(0) = 1$.

Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a $f(x + y) = f(x)f(y)$.

e) Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$U_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + x^2 2! + \cdots + x^n n!, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

1. Montrer que U_n converge simplement sur $\mathbb{R}$ et uniformément sur tout intervalle fermé borné $[-a, a]$.

(On montrera que $|U_m(x) - U_n(x)| \leq \dfrac{2a^{n+1}}{(n+1)!}$.)

2. On pose $U(x) = \lim_n U_n(x)$.

Montrer que la fonction $x \to U(x)$ est dérivable et vérifie les hypothèses de a) et $U(0) = 1$.

3. Donner une valeur approchée de $U(0)$ à 10^{-4} près.

Chapitre 5 : FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

5.1. Rappels et généralités

5.1.1.

Soit $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)/x_i \in \mathbb{R}\}, i = 1, 2, \ldots, n\}$. On munit $\mathbb{R}^n$ d'une structure d'espace vectoriel de dimension n par les deux lois :

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \quad \lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$$

où $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour $i = 1, 2, \ldots, n$, soient

$e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$ et $e_i = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0 \ldots, 0)$

l'élément de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les composantes, sauf la i-ème qui vaut 1, sont nulles.

La famille $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$, appelée *base canonique*.

5.1.2.

$\mathbb{R}^n$ est muni naturellement d'une structure affine (voir Cours d'Algèbre), grâce à l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ (x, y) &\to \overrightarrow{xy} = y - x \end{aligned}$$

Muni de cette structure, $\mathbb{R}^n$ sera noté $\mathscr{A}^n$ et ses éléments sont appelés des points. a étant un point de $\mathscr{A}^n$, l'application

$$\begin{aligned} \theta_a : \mathscr{A}^n &\to \mathbb{R}^n \\ m &\mapsto x = \overrightarrow{am} \end{aligned}$$

est une bijection. On dit alors que, par cette bijection, $\mathscr{A}^n$ est identifié, en prenant a comme origine, à l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. Un repère dans $\mathscr{A}^n$ d'origine a est un couple (a, B) où $a \in \mathscr{A}^n$ et B une base de $\mathbb{R}^n$. Les diverses propriétés énoncées dans les paragraphes qui suivent dans $\mathbb{R}^n$.

se traduisent aisément dans le langage de l'espace $\mathscr{A}^n$ grâce à la bijection θ_a. En particulier si a est le point $O = (0, \dots, 0)$, alors on identifiera un point M de $\mathscr{A}^n$ avec le vecteur $x = \overrightarrow{OM}$. Les symboles de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ ne seront surmontés d'une flèche que lorsqu'il y aura risque de confusion.

5.1.3.

À l'instar de la valeur absolue d'un nombre réel, on introduit la notion de norme d'un vecteur de $\mathbb{R}^n$.

5.1.3.1. Définition

Une norme sur $\mathbb{R}^n$ est une application

$$N : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^+$$

vérifiant les conditions suivantes :

1) $N(x) = 0 \iff x = 0$ (séparation)

2) $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ (homogénéité)

3) $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ (inégalité triangulaire)

Remarque : de 1), 2), 3) on tire :

$$\big|\, ||x|| - ||y|| \,\big| \leq ||x - y||$$

5.1.3.2. Exemples de norme sur $\mathbb{R}^n$

Si $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$,

$$N_1(x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \qquad N_2(x) = \sup(|x_i|) \qquad \text{et} \qquad N_e(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2\right)^{1/2}$$

sont trois normes sur $\mathbb{R}^n$. N_1, N_2, N_e vérifient les inégalités suivantes : $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\frac{1}{n} N_1(x) \leq N_2(x) \leq N_1(x)$$

$$N_2(x) \leq Ne(x) \leq \sqrt{n} N_2(x) \tag{1}$$

D'une manière générale, on dira que deux normes N et N' sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes s'il existe deux réels a et b strictement positifs tels que :

$$aN'(x) \leq N(x) \leq bN'(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Il résulte de (1) que les trois N_1, N_2 et N_e sont équivalentes sur $\mathbb{R}^n$. L'inégalité (2) permettra de constater aisément que les définitions et les propriétés vérifiées par une fonction, dans les paragraphes qui suivent, et énoncées à partir d'une norme N de $\mathbb{R}^n$, seront encore vérifiées, si on remplace dans l'énoncé N par une norme équivalente.

Dans la suite une norme N sur $\mathbb{R}^n$ sera notée $||\ ||$. On dira que $\mathbb{R}^n$, muni d'une norme, est un espace vectoriel normé ; dans ce cas il sera noté $(\mathbb{R}^n, ||\ ||)$.

5.1.4. Boules, ouverts, voisinages

5.1.4.1. Définition

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ (resp. $m_0 \in \mathscr{A}^n$), la boule ouverte de centre x_0 (resp. m_0) et de rayon $\rho > 0$, est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ (resp. de $\mathscr{A}^n$), notée $B(x_0, \rho)$ (resp. $\mathscr{B}(m_0, \rho)$), défini par :

$$B(x_0, \rho) = \{x \in \mathbb{R}^n, \ ||x - x_0|| < \rho\},$$
$$\mathscr{B}(m_0, \rho) = \{m \in \mathscr{A}^n, \ ||\overrightarrow{m_0 m}|| < \rho\}.$$

$\mathscr{B}(m_0, \rho)$ est indépendant de l'origine choisie dans $\mathscr{A}^n$. Les ensembles

$$B_F(x_0, \rho) = \{x \in \mathbb{R}^n, \ ||x - x_0|| \leq \rho$$
$$\text{et} \quad \mathscr{B}_F(m_0, \rho) = \{m \in \mathscr{A}, \ ||x - x_0|| \leq \rho\}$$

sont respectivement appelés *boule fermée* de centre x_0 et de rayon ρ et boule fermée de centre m_0 et de rayon r.

On dira qu'un sous-ensemble Ω (resp. O de $\mathscr{A}^n$) de $\mathbb{R}^n$ est *ouvert* si et seulement si :

$$\forall x \in \Omega, \ \exists \rho > 0, \quad \text{tel que } \mathscr{B}(x, \rho) \subseteq \Omega$$
$$(\text{resp. } \forall m \in O, \ \exists \rho > 0, \quad \text{tel que } \mathscr{B}(m, \rho) \subset O).$$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ (resp. $m_0 \in \mathscr{A}^n$). Un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathscr{A}^n$) contenant x_0 (resp. m_0) est appelé *voisinage* de x_0 (resp. m_0), s'il contient une boule ouverte de centre x_0 (resp. m_0).

Remarque : Un ouvert non vide est un voisinage de chacun de ses points.

5.1.5. Produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$

5.1.5.1. Définition

Un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ est la donnée d'une application :

$$\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$$

vérifiant les propriétés suivantes.

1) $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$ (symétrie)

2) $\varphi(x, y + z) = \varphi(x, y) + \varphi(x, z)$ (linéarité)

3) $\lambda\varphi(x, y) = \varphi(\lambda x, y)$ (homogénéité)

4) $\varphi(x, x) > 0$ si $x \neq 0$ (positivité)

Notation : $\varphi(x, y) = \langle x, y\rangle = x \cdot y$.

Une famille de vecteurs $(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}, \dots, \overrightarrow{V_k})$ dans $\mathbb{R}^n$ est dite *orthogonale* par rapport à φ si $\varphi(\overrightarrow{V_i}, \overrightarrow{V_j}) = 0$, pour $i \neq j$.

Une base $\mathscr{B} = (\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_n})$ est dite *orthonormée* (par rapport à φ) si : $\varphi(\overrightarrow{u_i}, \overrightarrow{u_j}) = 0$ si $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, n$ et $\varphi(\overrightarrow{u_i}, \overrightarrow{u_i}) = 1$, $i = 1, \dots, n$.

On montre que pour un produit scalaire φ donné, il existe toujours des bases orthonormées. Par rapport à une base orthonormée $(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_n})$, l'expression de φ est :

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

lorsque $x = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{u_i}$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i \overrightarrow{u_i}$.

5.1.5.2. Exemples

1) L'application $(x, y) \mapsto x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, où $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$, définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ pour lequel la base canonique est orthonormée.

2) Pour $n = 2$, l'application

$$(x, y) \mapsto x \cdot y = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

5.1.5.3. Définition

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est dit euclidien s'il est muni d'un produit scalaire. Soit φ un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. L'application

$$x \mapsto ||x|| = \sqrt{\varphi(x, x)}$$

définit une norme, dite *euclidienne*, sur $\mathbb{R}^n$.

5.1.5.4. Propriété

Si $||\ ||$ est une norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$, alors on a :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \ |x \cdot y| \leq ||x||\, ||y||,$$

le $\cdot$ indiquant le produit scalaire associé à $||\ ||$.

Preuve — Soit $(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_n})$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$. Soient $x = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{u_i}$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i \overrightarrow{u_i}$ deux éléments de $\mathbb{R}^n$.

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \quad ||x|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \quad \text{et} \quad ||y|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

$$
\begin{aligned}
\|x\|^2\|y\|^2-(x\cdot y)^2 &= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)-\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i^2+\sum_{i<j}(x_i^2 y_j^2+x_j^2 y_i^2) \\
&\qquad -\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 y_i^2-2\sum_{i<j} x_i y_i x_j y_j \\
&= \sum_{i<j}(x_i^2 y_j^2+x_j^2 y_i^2-2x_i y_i x_j y_j) \\
&= \sum_{i<j}(x_i y_j-x_j y_i)^2 \geq 0
\end{aligned}
$$

D'où $\|x\|^2\|y\|2 \geq (x\cdot y)^2$ ou encore $\|x\|\,\|y\| \geq |x\cdot y|$.

5.2. Fonctions de plusieurs variables

On considère $\mathbb{R}^n$, muni de la norme, $\|x\| = \sup\limits_{i=1,2,\ldots,n} |x_i|$

5.2.1. Définition

On appelle fonction de n variables toute application

$$
\begin{aligned}
f : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\
x=(x_1,\ldots,x_n) &\mapsto f(x)=f(x_1,\ldots,x_n)
\end{aligned}
$$

d'une partie D de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

5.2.1.1. Exemples

1) $f : (x,y) \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ x^2+y^2\neq 0\}=\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$$

2) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ -1\leq xy\leq 1\}$.

$$f=(x,y)\mapsto \operatorname{Arcsin}(xy)$$

3) $D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/\ x^2+y^2+z^2<1\}$

$$f=(x,y,z)\mapsto \ln(1-x^2-y^2-z^2)$$

D est la boule ouverte de centre 0 et de rayon 1

5.2.2. Limite et continuité

Soit D un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$. On dira que D est arbitrairement voisin de x_0 et on notera $D \sim x_0$, si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in D$ tel que $||x - x_0|| < \varepsilon$.

5.2.2.1. Définition

Soient $D \subset \mathbb{R}^n$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une application. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $D \sim x_0$, et soit $l \in \mathbb{R}$. On dira que f admet pour limite l quand x tend x_0 et on écrira

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D}} f(x) = l$$

si et seulement si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ tel que

$$(||x - x_0|| < \delta \text{ et } x \in D) \Rightarrow (|f(x) - l| < \varepsilon)$$

5.2.2.2. Définition

Soient $D \subset \mathbb{R}^n$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une application. Soit $x_0 \in D$ tel que $D - \{x_0\} \sim x_0$. On dira que f est continue en x_0 si et seulement si

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D - \{x_0\}}} f(x) = f(x_0)$$

5.2.2.3. Remarque

Les définitions de limite et de continuité pour les fonctions de plusieurs variables sont identiques à celles des fonctions d'une variable, la valeur absolue dans $\mathbb{R}$ étant remplacée ici par la norme ; on aura donc les mêmes propriétés sur les limites et la continuité que pour les fonctions d'une variable.

5.3. Dérivées partielles

5.3.1. Définition

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une application, x_0 étant un point de Ω, soit $u \in \mathbb{R}^n$. On dira que f admet une *dérivée partielle* en x_0 relativement à u si

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(f(a + tu) - f(a) \right) \quad \text{existe.}$$

Si cette limite existe, on la notera $D_u f(a)$ ou $\mathrm{d}\, uf(a)$ et l'on dira que c'est la dérivée partielle de f en x_0 relativement à u.

5.3.2. Remarques

1) Comme $a \in \Omega$, il existe $\rho > 0$ tel que $B(a, \rho) \subset \Omega$ et si $|t|$ est assez petit, $a + tu \in B(a, \rho)$; donc $f(a + tu)$ est bien défini pour t voisin de 0.

2) Posons $F(t) = f(a + tu)$. F est définie dans un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$ et on a $D_u f(a) = F'(0)$.

5.3.3. Définition

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une application. Soit $a \in \Omega$. On appelle *dérivée partielle* de f en a par rapport à la variable x_i, le nombre réel, s'il existe, $D_{e_i}f(a)$, où e_i est le i-ème élément de la base canonique $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$. On notera :

$$D_{e_i}f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = f'_{x_i}(a) = D_i f(a) = \mathrm{d}_{e_i} f(a) = \mathrm{d}_i f(a)$$

5.3.4. Remarques

1) D'après 5.3.1 et 5.3.2, si on pose $a = (a_1, \dots, a_n)$ alors

$$D_{e_i}f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1, a_2, \dots, a_i + t, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{t}$$

Ainsi pour le calcul de $f'_{x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, il suffit de dériver f comme une fonction de la seule variable x_i, les autres variables jouant le rôle de paramètres.

Exemple

$$f(x, y) = \operatorname{Arctg} \frac{y}{x}, \ (x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}.$$

$$f'_x(x, y) = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{y^2}{x^2} = \frac{-y}{x^2 + y^2} \qquad f'_y(x, y) = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

5.3.5. Dérivées partielles d'ordre supérieur

Si $D_i f(x)$ existe dans un ouvert V_a contenant a, on aura une fonction, notée $D_i f$, de V_a dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{aligned} D_i f : V_a &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto D_i f(x) \end{aligned}$$

Si $D_i f$ admet une dérivée partielle par rapport à x_j en a, on définit la *dérivée partielle d'ordre 2* $D_{ij} f(a)$ de f en a par :

$$D_{ij}f(a) = D_j\left(D_i f\right)(a) = \lim_{t \to 0} \frac{D_i f(a + t e_j) - D_i f(a)}{t}.$$

Notation :

$$\text{si } i \neq j, \ D_j(D_i f)(x) = D_{ij}(f)(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j}(x) = f''_{x_i x_j}(x)$$

$$\text{si } i = j, \ D_i(D_i f)(x) = D_{i^2} f(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) = f''_{x_i^2}(x).$$

De même si les $D_{ij} f(x)$ sont définies dans un ouvert contenant a et admettent des dérivées partielles par rapport aux variables x_k en a, on pourra définir les dérivées partielles d'ordre 3 de f en a.

En itérant ce processus, on définit la notion de dérivées partielles d'ordre p d'une fonction en un point : l'existence des dérivées partielles d'ordre p de f en a suppose celle des dérivées partielles d'ordre k de f dans un ouvert contenant a pour $1 \leq k < p$.

Le nombre de combinaisons p à p de n éléments étant égal à n^p, il y a *a priori* n^p dérivées partielles d'ordre p de f.

Exemple : $f(x, y) = \text{Arctg}\,\dfrac{y}{x}$. On a déjà calculé les dérivées partielles d'ordre 1 de f. Pour les dérivées partielles d'ordre 2 on a :

$$f''_{x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \qquad f''_{y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = -\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = f''_{yx}.$$

5.3.6. Définition

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une application. On dira que :

f est de classe C^0 sur Ω si f est continue dans Ω.

f est de classe C^1 sur Ω si toutes les dérivées partielles d'ordre 1 de f sont définies et continues dans Ω.

f est de classe C^p sur Ω si toutes les dérivées partielles d'ordre p de f sont définies et continues dans Ω.

f est de classe C^∞ si pour tout $p \in \mathbb{N}$, les dérivées partielles d'ordre p sont définies et continues sur Ω.

5.4. Différentielle d'une fonction de plusieurs variables

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. L'existence des dérivées partielles d'ordre 1 de f en un point $a \in \Omega$ donne la configuration de f pour les points voisins de a appartenant aux droites $\{a + te_i, t \in \mathbb{R}\}$, $i = 1, \ldots, n$.

Pour avoir des informations sur f dans un voisinage de a dans $\mathbb{R}^n$, on introduit la notion de différentielle de f en a. On note $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

On rappelle qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ est différentiable en $t_0 \in I$ si et seulement si :

$$\exists L \in \mathscr{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ \text{tel que} : \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta(\varepsilon, t_0) > 0,\ \text{tel que,}$$
$$\text{si } |t - t_0| < \delta,\ \text{alors } |f(t) - f(t_0) - L(t - t_0)| < \varepsilon |t - t_0|$$
$$L(1) = f'(t_0) \quad \text{et} \quad L(t) = tf'(t_0).$$

On calque la définition de la différentiabilité d'une fonction de plusieurs variables $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ en un point de Ω sur celle d'une fonction d'une seule variable en considérant cette fois $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et en remplaçant la valeur absolue dans $\mathbb{R}$ par la norme sur $\mathbb{R}^n$.

5.4.1. Définition

Soient $x_0 \in \mathbb{R}^n$, Ω un voisinage ouvert de x_0 dans $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une application. f est différentiable en x_0 si et seulement si :

$$\boxed{\begin{array}{l} \exists L \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \quad \text{tel que} : \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta(\varepsilon, x_0) > 0 \text{ tel que} \\ \|x - x_0\| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0) - L(x - x_0)| \leq \varepsilon \|x - x_0\| \end{array}} \quad (1)$$

5.4.2. Proposition

Si f est différentiable en x_0, alors l'application linéaire L est unique.

Démonstration — L_1 et L_2 étant deux éléments de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ qui vérifient la propriété (1) de la définition 5.3.1, soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, $\|u\| \leq \delta(\varepsilon)$ entraîne :

$$\begin{aligned} &|f(x_0 + u) - f(x_0) - L_1(u)| \leq \varepsilon \|u\| \\ \text{et } &|f(x_0 + u) - f(x_0) - L_2(u)| \leq \varepsilon \|u\|. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \|u\| \leq \delta(\varepsilon) \Rightarrow |L_1(u) - L_2(u)| &\leq |f(x_0 + u) - f(x_0) - L_1(u)| \\ &+ |f(x_0 + u) - f(x_0) - L_2(u)| \leq 2\varepsilon \|u\| \quad (2) \end{aligned}$$

Si L_1 était différent de L_2, il existerait $z_0 \in \mathbb{R}^n$, $z_0 \neq 0$, tel que $L_1(z_0) \neq L_2(z_0)$. On pose $z = \dfrac{\delta(\varepsilon)}{\|z_0\|} z_0$. On a $\|z\| = \delta(\varepsilon)$ et (2) entraîne

$$0 \leq |L_1(z) - L_2(z)| \leq 2\varepsilon \|z\|.$$

Compte tenu de la linéarité de L_1 et L_2 on en déduit que

$$0 \leq |L_1(z_0) - L_2(z_0)| \leq 2\varepsilon \|z_0\|.$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a $L_1(z_0) - L_2(z_0) = 0$, ce qui donne une contradiction. Par suite $L_1 = L_2$.

5.4.3. Définition

Si f est différentiable en x_0, l'application linéaire L de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ donnée dans la définition 5.3.1 s'appelle la <u>différentielle de f en x_0</u>.

Notation : $L = Df(x_0) = \mathrm{d}f(x_0)$

5.4.4. Remarques

1) L'existence de la différentielle d'une fonction f en un point x_0 reflète la possibilité d'approcher f par l'application affine

$$x \to f(x_0) + \mathrm{d}\,f(x_0) \cdot (x - x_0) = (f(x_0) - \mathrm{d}\,f(x_0) \cdot x_0) + \mathrm{d}\,f(x_0) \cdot x.$$

L'inégalité (1) de la définition 5.3.1 mesure l'erreur de cette approximation quand x est voisin de x_0.

2) si $L \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, alors

$$|L(x)| = \left|\sum_{i=1}^{n} L(x_i e_i)\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} x_i L(e_i)\right| \leq (\sup |x_i|) \sum_{i=1}^{n} |L(e_i)|$$

$$\leq ||x|| B. \quad \text{où } B = \sum_{i=1}^{n} |L(e_i)|$$

Par suite si f est différentiable en x_0, l'inégalité (1) de la définition 5.3.1 entraîne, en prenant $\varepsilon = 1$ et $||x - x_0|| < \delta(1)$:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |L(x - x_0)| + ||x - x_0|| \\ &\leq B||x - x_0|| + ||x - x_0|| \\ |f(x) - f(x_0)| &\leq (B + 1)||x - x_0|| \end{aligned} \tag{3}$$

En particulier si f est différentiable en x_0, alors f est continue en x_0.

3) On montrera, comme pour les fonctions d'une variable, que si f et g sont différentiables en x_0, il en est de même pour $\alpha f + \beta g$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) et fg et on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(\alpha f + \beta g)(x_0) &= \alpha\, \mathrm{d}\,f(x_0) + \beta\, \mathrm{d}\,g(x_0) \\ \mathrm{d}(fg)(x_0) &= f(x_0)\, \mathrm{d}\,g(x_0) + \mathrm{d}\,f(x_0) g(x_0) \end{aligned}$$

5.4.5. Exemples

1) Si $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est constante ($f(x) = t_0$, $x \in \Omega$), alors f est différentiable en tout point de Ω et pour tout $x_0 \in \Omega$, $\mathrm{d}\,f(x_0)$ est l'application linéaire nulle de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

2) Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une application linéaire, alors f est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^n$ et $\mathrm{d}\,f(x_0) = f$ pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Par suite, si g est une application affine ayant pour partie linéaire f, alors $\mathrm{d}\,g(x_0) = \mathrm{d}\,f(x_0) = f$ en tout point $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

5.5. Différentielles et dérivées partielles

On étudie ici la relation entre l'existence des dérivées partielles d'ordre 1 d'une fonction f en un point et celle de la différentielle de f en ce point.

5.5.1. Théorème

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une application. Si f est différentiable en $x_0 \in \Omega$, alors pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, la dérivée partielle $\mathrm{d}\, uf(x_0)$ existe et on a :

$$\mathrm{d}\, uf(x_0) = \mathrm{d}\, f(x_0) \cdot (u).$$

Démonstration — Soit $u \in \mathbb{R}^n$. Si f est différentiable en x_0, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que :

$$|f(x_0 + tu) - f(x_0) - \mathrm{d}\, f(x_0) \cdot tu| < \varepsilon ||tu|| \quad \text{si } ||tu|| < \delta(\varepsilon) \qquad (1)$$

Si $u = 0$, alors $\mathrm{d}\, uf(x_0) = 0 = \mathrm{d}\, f(x_0) \cdot (u)$.

On suppose maintenant $u \neq 0$: dans ce cas si $0 < |t| \leq \dfrac{\delta(\varepsilon)}{||u||}$, alors de (4) on tire :

$$\left| \frac{f(x_0 + tu) - f(x_0)}{t} - \mathrm{d}\, f(x_0) \cdot u \right| \leq \varepsilon ||u||. \qquad (2)$$

(5) montre alors que $\mathrm{d}\, f(x_0) \cdot u = \mathrm{d}\, uf(x_0)$.

5.5.2. Corollaire

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une application. Si f est différentiable en $x_0 \in \Omega$, les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)$ existent et si $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$, alors :

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathrm{d}\, f(x_0).u = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0).u_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0).u_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0).u_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0).u_i \end{aligned}}$$

Démonstration

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\, f(x_0).(u) &= \mathrm{d}\, f(x_0) \cdot (\sum_{i=1}^{n} u_i e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} u_i \,\mathrm{d}\, f(x_0).(e_i). \\ &= \sum_{i=1}^{n} u_i \,\mathrm{d}\, e_i f(x_0). \text{ d'après 5.5.1} \\ &= \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \end{aligned}$$

5.5.2.1. Différentielle et champ de gradients

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une application. Si f est différentiable en x_0, posons, pour $x \neq x_0$,

$$\varepsilon(x, x_0) = \frac{f(x) - f(x_0) - \mathrm{d}\, f(x_0) \cdot (x - x_0)}{||x - x_0||}.$$

L'inégalité (1) de la définition 5.3.1 implique: $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x, x_0) = 0$ et on peut écrire

$$f(x) - f(x_0) = \mathrm{d}\, f(x_0) \cdot (x - x_0) + ||x - x_0||\varepsilon(x, x_0)$$
$$\text{avec} \quad \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x, x_0) = 0 \tag{1}$$

Comme $||x|| \leq \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i| \leq n||x||$, en posant

$$\varepsilon_1(x, x_0) = \frac{f(x) - f(x_0) - \mathrm{d}\, f(x_0) \cdot (x - x_0)}{\sum\limits_{i=1}^{n} |x^i - x_0^i|}.$$

on voit encore que $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon_1(x, x_0) = 0$ et

$$f(x) - f(x_0) = \mathrm{d}\, f(x_0) \cdot (x - x_0) + \sum_{i=1}^{n} |x^i - x_0^i|\varepsilon_1(x, x_0)$$
$$\text{avec} \ \lim_{x \to x_0} \varepsilon_1(x, x_0) = 0 \tag{2}$$

En considérant f comme une application de $\mathscr{A}^n$ dans $\mathbb{R}$, on appelle <u>*gradient* de f en M_0</u> et on note $\overrightarrow{grad}\, f(M_0)$ le vecteur d'origine M_0 et de coordonnées $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(M_0), \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(M_0)$. Si f est différentiable en tout point de Ω, on obtient une application

$$\begin{aligned} \overrightarrow{grad} f : \Omega &\to \mathbb{R}^n \\ M &\mapsto \overrightarrow{grad} f(M) \end{aligned}$$

$\overrightarrow{grad} f$ s'appelle le champ de gradients associé à f. En posant $\vec{\varepsilon}(x, x_0) = \varepsilon_1(x, x_0)(1, 1, \ldots, 1)$, l'équation (2) s'écrit :

$$\boxed{f(M) - f(M_0) = \overrightarrow{M_0 M} \cdot (\overrightarrow{grad} f(M_0) + \vec{\varepsilon}(M, M_0))} \tag{3}$$

avec $\lim\limits_{M \to M_0} \vec{\varepsilon}(M, M_0) = \vec{0}$, le signe $\cdot$ désignant le produit scalaire, $x \cdot y = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$.

5.5.3. Remarques

1) Les dérivées partielles d'ordre 1 peuvent exister en un point, sans que la fonction soit différentiable en ce point.

Exemple : La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} 0 & \text{si } x = (0,0) \\ \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{pour } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

n'est pas continue en $(0,0)$: en effet, de $\lim_{x\to 0} f(x, \lambda x) = \dfrac{\lambda}{1+\lambda^2}$, il résulte que f n'a pas de limite en $(0,0)$. Par suite f n'est pas différentiable en $(0,0)$. Cependant les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existent et sont toutes les deux nulles.

2) Les projections $p_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $p_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$ sont des applications différentiables (puisque linéaires) et la différentielle de p_i en chaque point coïncide avec p_i : si l'on note $\mathrm{d}\,x_i$ la différentielle de p_i, on a

$$\mathrm{d}\,x_i(u) = u_i.$$

Si f est une fonction différentiable en un point x_0, alors :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\,f(x_0)(u) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)u_i \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\,\mathrm{d}\,x_i \right)(u) \end{aligned}$$

d'où $$\mathrm{d}\,f(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\,\mathrm{d}\,x_i.$$

3) $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension n. Pour $i = 1, 2, \ldots, n$, $\mathrm{d}\,x_i \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et si $(e_1, \ldots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on a

$$\mathrm{d}\,x_i(e_j) = \begin{cases} 0 & \text{pour } i \neq j \\ 1 & \text{pour } i = j \end{cases}$$

on voit facilement que $(\mathrm{d}\,x_1, \mathrm{d}\,x_2, \ldots, \mathrm{d}\,x_n)$ est une base de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. On a vu que l'existence des dérivées partielles en un point pour une fonction f ne suffit pas à assurer la différentiabilité de f en ce point. Toutefois si la fonction f est de classe C^1 sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, alors f est différentiable en tout point de Ω. Plus précisément :

5.5.4. Théorème

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une application. Soit $a \in \Omega$. Si les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, \ldots, n$, existent dans un voisinage de a et sont continues en a, alors f est différentiable en a

Démonstration — Soit $\varepsilon > 0$. On pose $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$. Soient $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$ et z_0 définis par : $z_1 = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, x_n)$, $z_2 = (a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, x_{n-1}, x_n)$ et $z_k = (a_1, \dots, a_{n-k}, x_{n-k+1}, x_{n-k+2}, \dots, x_n)$ avec $z_0 = a$ et $z_n = x$. $f(x) - f(a)$ peut s'écrire sous la forme

$$f(x) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} \{f(z_i) - f(z_{i-1})\} \tag{2}$$

$\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ apparaissant comme la dérivée de f considérée comme fonction de la seule variable x_i, les autres variables jouant le rôle de paramètres, on peut appliquer le théorème des accroissements finis pour les fonctions d'une variable à la restriction de f au segment joignant z_{i-1} et z_i. Il existe alors un point y_{n-i+1} de ce segment tel que :

$$f(z_i) - f(z_{i-1}) = \frac{\partial f}{\partial x_{n-i+1}}(y_{n-i+1})(x_{n-i+1} - a_{n-i+1}).$$

D'où
$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_{n-i+1}}(y_{n-i+1})(x_{n-i+1} - a_{n-i+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(yi)(x_i - a_i) \end{aligned}$$

et
$$\begin{aligned} f(x) - f(a) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i) \\ = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(y_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right)(x_i - a_i). \quad (3) \end{aligned}$$

les $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ étant continues en a, il existe $\delta(\varepsilon)$ tel que, si $||x - a|| < \delta(\varepsilon)$, on a

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right| < \varepsilon, \qquad i = 1, 2, \dots, n.$$

D'après la définition des z_i, si $||x - a|| < \delta(\varepsilon)$, alors $||y_i - a|| < \delta(\varepsilon)$, et on a $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(y_i) - \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right| < \varepsilon$, $i = 1, 2, \dots, n$. (3) donne :

$$\begin{aligned} \left|f(x) - f(a) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i)\right| &\leq \varepsilon \sum_{i=1}^{n} |x_i - a_i \\ &\leq n\varepsilon ||x - a|| \end{aligned}$$

Par suite f est différentiable en x_0 et $Df(x_0) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$.

5.5.5. Exemples

1) Soit f la fonction définie sur l'ouvert $\Omega = \{(x,y)/x^2 + y > 0\}$ de $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \sqrt{x^2+y}$. Déterminons la différentielle de f au point $a = (1,1)$. $f'_x(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y}}$ et $f'_y(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y}}$. f'_x et f'_y sont définies et continues dans Ω. Donc f est différentiable en tout point de Ω, et au point $a = (1,1) \in \Omega$ on a : $\mathrm{d}\,f(a) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\mathrm{d}\,x + \dfrac{1}{2}\,\mathrm{d}\,y)$

2) De même la fonction $f(x,y) = \operatorname{Arctg}\dfrac{y}{x}$ est de classe C^1 sur l'ouvert $\Omega = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et en tout point (x,y) de Ω, on a :

$$\mathrm{d}\,f(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\,x + \frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\,y = \frac{x\,\mathrm{d}\,y - y\,\mathrm{d}\,x}{x^2+y^2}$$

5.5.6. Remarque

Si f et g sont des fonctions différentiables en un point a d'un ouvert Ω, il en est de même de $f+g$, $\lambda f (\lambda \in \mathbb{R})$, fg et $\dfrac{f}{g}$ si $g(x) \neq 0$ sur Ω, et on a :

$$\mathrm{d}(f+g)(a) = \mathrm{d}\,f(a) + \mathrm{d}\,g(a)$$
$$\mathrm{d}(fg)(a) = f(a)\,\mathrm{d}\,g(a) + g(a)\,\mathrm{d}\,f(a)$$
$$\mathrm{d}(\lambda f)(a) = \lambda\,\mathrm{d}\,f(a)$$
$$\mathrm{d}\left(\frac{f}{g}\right)(a) = \frac{g(a)\,\mathrm{d}\,f(a) - f(a)\,\mathrm{d}\,g(a)}{g^2}$$

5.6. Différentielle d'une fonction composée

5.6.1. Théorème

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une application, I un intervalle ouvert et $g : I \to \mathbb{R}$ une application telle que $g(I) \subset \Omega$.

$$t \mapsto (g_1(t), \ldots, g_n(t))$$

Soit $t_0 \in I$. Si les fonctions g_i, $i = 1, \ldots, n$, sont dérivables en t_0 et si f est différentiable au point $a = g(t_0)$, alors la fonction composée $F = f \circ g$ est dérivable en t_0 et on a :

$$\boxed{F'(t_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) g'_i(t_0).} \qquad (1)$$

Démonstration — On pose $h(x) = f(x) - \sum_{i=1}^{n}(x_i - a_i)\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ et $H = h \circ g$.

On a $\dfrac{\partial h}{\partial x_i}(a) = 0$ pour $i = 1, \ldots, n$ et $\mathrm{d}\,h(a) \equiv 0$. Par suite, pour $\varepsilon > 0$, il existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que si $||x - a|| < \delta$, alors :

$$|h(x) - h(a)| \leq \varepsilon ||x - a|| \tag{1}$$

Les g_i étant dérivables en t_0, il existe $\beta > 0$, et $k > 0$ tel que si $|t - t_0| < \beta$, on a : $|g_i(t) - g_i(t_0)| < k|t - t_0|$ pour $i = 1, 2, \dots, n$. Comme $||g(t) - g(t_0)|| = \sup |g_i(t) - g_i(t_0)|$, $i = 1, \dots, n$, si $|t - t_0| < \beta$, alors

$$||g(t) - g(t_0)|| \leq k|t - t_0|. \tag{2}$$

Soit $\gamma = \inf\left(\beta, \dfrac{\delta}{k}\right)$. Si $|t - t_0| < \gamma$, (1) et (2) impliquent :

$$|H(t) - H(t_0)| < \varepsilon k|t - t_0|,$$

donc H est dérivable en t_0 et $H'(t_0) = 0$. Or

$$F(t) = H(t) + \sum_{i=1}^{n} \left(g_i(t) - g_i(t_0)) \frac{\partial f}{\partial x_i}(a \right),$$

d'où

$$F'(t_0) = \sum_{i=1}^{n} g_i'(t_0) \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

5.6.2. Remarques

1) Le symbole $*$ désigne le changement de variables : $*\{x_i = g_i(t) \quad i = 1, \dots, n\}$, on notera $*f$ la fonction $f \circ g$. On a alors :

$$*(f_1 + f_2) = *f_1 + *f_2, \qquad *(f_1 f_2) = (*f_1)(*f_2).$$

Si f est la fonction

$$x_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x_i(x) = x_i$$

où $x_i(x)$ est la i-ème composante de x, alors $*x_i = g_i$ et dans ce cas particulier la formule (1) de 5.6.1 s'écrit

$$\mathrm{d}\, *x_i = *\,\mathrm{d}\, x_i.$$

Dans le cas général, la formule (1) peut s'écrire :

$$\mathrm{d}\, F(t) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}\, g_i(t) \frac{\partial f}{\partial x_i}\,(g(t))$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
\mathrm{d} *f &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d} *x_i * \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \\
&= \sum_{i=1}^{n} * \left(\mathrm{d}\, x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right) \\
&= * \left(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}\, x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right)
\end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{\mathrm{d}*f = *\mathrm{d}\,f} \tag{1}$$

2) Le calcul précédent se généralise aisément. Supposons par exemple pour le cas de 2 variables que le symbole $*$ indique le changement de variable

$$\begin{cases} x = g(u, v, w) \\ y = h(u, v, w) \end{cases}$$

$*f$ désigne alors la fonction

$$*f = F : (u, v, w) \mapsto f\left(g(u, v, w), h(u, v, w)\right).$$

Si $f(x, y)$ est différentiable, et si g et h admettent des dérivées partielles d'ordre 1, on a : (Théorème 5.6.1)

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial(*f)}{\partial u} = *f'_x \frac{\partial g}{\partial u} + *f'_y \frac{\partial h}{\partial u} \tag{2}$$

et des formules analogues pour w et v. En posant

$$*\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial *x}{\partial u} = \frac{\partial g}{\partial u}$$
$$*\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial *y}{\partial u} = \frac{\partial h}{\partial u}$$

la formule (2) s'écrit :

$$\frac{\partial *f}{\partial u} = *\left(f'_x \frac{\partial x}{\partial u} + f'_y \frac{\partial y}{\partial u}\right)$$

3) Si en outre g et h sont différentiables la relation (1) de 1) entraîne :

$$*\mathrm{d}\,x = \mathrm{d}*x = \mathrm{d}\,g = g'_t\,\mathrm{d}\,u + g'_v\,\mathrm{d}\,v + g'_w\,\mathrm{d}\,w$$
$$*\mathrm{d}\,y = \mathrm{d}*y = \mathrm{d}\,h = h'_t\,\mathrm{d}\,u + h'_v\,\mathrm{d}\,v + h'_u\,\mathrm{d}\,w$$

d'autre part :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\,F &= \mathrm{d}*f = F'_t\,\mathrm{d}\,u + F'_v\,\mathrm{d}\,v + F'_u\,\mathrm{d}\,w \\
*\mathrm{d}\,f &= *\left(f'_x\,\mathrm{d}\,x + f'_y\,\mathrm{d}\,y\right) = f'_x *\mathrm{d}\,x + f'_y *\mathrm{d}\,y \\
&= *f'_x\left(g'_t\,\mathrm{d}\,u + g'_v\,\mathrm{d}\,v + g'_u\,\mathrm{d}\,w\right) + *f'_y\left(h'_t\,\mathrm{d}\,u + h'_v\,\mathrm{d}\,v + h'_u\,\mathrm{d}\,w\right) \\
&= \left(*f'_x g'_t + *f'_y h'_t\right)\mathrm{d}\,u + \left(*f'_x g'_v + *f'_y h'_v\right)\mathrm{d}\,v + \left(*f'_x g'_u + *f'_y h'_u\right)\mathrm{d}\,w \\
&= F'_t\,\mathrm{d}\,u + F'_v\,\mathrm{d}\,v + F'_u\,\mathrm{d}\,w
\end{aligned}$$

d'après (2). D'où la formule :

$$\boxed{\mathrm{d}*f = *\mathrm{d}\,f.} \tag{3}$$

La formule (3) généralise (1) de 1) et condense sous une forme concise une bonne partie du cours d'analyse.

La formule (3) s'interprète en disant que l'opérateur $*$ (changement de variables) est « transparent » pour l'opérateur d (différentiation).

Exemple — Soit $*$ le changement de variables $x = \varrho \cos\theta$, $y = \varrho \cos\theta$, faisant passer des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires. En appliquant (3) on a :

$$*F(x,y) = \Phi(\varrho, \theta)$$

$$\Phi'_\varrho \,\mathrm{d}\varrho + \Phi'_\theta \,\mathrm{d}\theta = *f'_x(\mathrm{d}\varrho \cos\theta - \varrho \sin\theta \,\mathrm{d}\theta) + *f'_y(\mathrm{d}\varrho \sin\theta - \varrho\cos\theta \,\mathrm{d}\theta)$$

d'où :

$$\Phi'_\varrho = (*f'_x)\cos\theta + (*f'_y)\sin\theta$$
$$\Phi'_\theta = (*f'_x)(-\varrho\sin\theta) + (*f'_y)(\varrho\cos\theta)$$

ou encore :

$$\varrho\Phi'_\varrho = *(xf'_x + yf'_y)$$
$$\Phi'_\theta = *(xf'_y - yf'_x)$$

5.7. Formule des accroissements finis Théorème de Schwartz Formule de Taylor

5.7.1. Théorème des accroissements finis

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une application différentiable sur Ω. Pour tout couple d'éléments a, b de Ω, tels que le segment $[a, b]$ est contenu dans Ω, il existe θ, $0 < \theta < 1$ tel que :

$$\boxed{f(b) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\theta b + (1-\theta)a)(b^i - a^i)} \qquad (1)$$

Corollaire — Soit f une application différentiable sur un ouvert convexe Ω de $\mathbb{R}^n$. Si $\mathrm{d}f(x) = 0$ pour tout $x \in \Omega$, alors f est constante sur Ω.

Démonstration du théorème — Posons $F(t) = f(\varphi(t))$ où $\varphi : [0,1] \to \Omega$ est définie par $\varphi(t) = (1-t)a + tb$. F est continue sur $[0,1]$ et d'après 5.6.1, F est dérivable sur $]0,1[$ avec

$$F'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\varphi(t))\,\varphi'_i(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}((1-t)a + tb)\,(b_i - a_i)$$

D'après le théorème des accroissements finis appliqué à F sur $[0,1]$, il existe θ, $0 < \theta < 1$, tel que $F(1) - F(0) = F'(\theta)(1-0)$: d'où le résultat.

5.7.2. Remarques

1) dans $\mathscr{E}^n$ la formule (1) s'écrit sous la forme :

$$f(M_1) - f(M_0) = \overrightarrow{grad} f(M) \cdot \overrightarrow{M_0M_1},$$

où M est un point du segment ouvert $]M_0, M1[$.

2) Si f est une application différentiable sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ et si les dérivées partielles sont bornées sur Ω, alors il existe un réel $k > 0$ tel que pour tout couple de points a, b de Ω, $[a, b] \subset \Omega$, on a :

$$|f(b) - f(a)| \leq k\|b - a\|. \tag{2}$$

En effet soit $\lambda > 0$ tel que $\forall x \in \Omega$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right| \leq \lambda$, $i = 1, \ldots, n$. La formule (1) donne :

$$\begin{aligned} |f(b) - f(a)| &\leq \lambda \sum_{i=1}^{n} |b_i - a_i| \\ &\leq k\|b - a\|, \text{ avec } k = \lambda n \end{aligned}$$

5.7.3. Théorème de Schwartz. Formule de Taylor

5.7.3.1. Théorème de Schwartz

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une application définie sur un Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$. Si deux dérivées partielles d'ordre p de f sont définies dans un voisinage d'un point $a \in \Omega$, et continues en a, et si elles ne diffèrent que par l'ordre des dérivations, alors elles sont égales au point a.

Démonstration — Compte tenu de la définition des dérivées partielles d'ordre p, à partir des dérivées partielles d'ordre $p - 1$, il suffit de démontrer le théorème pour $p = 2$.

Soit

$$\begin{aligned} f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ x, y &\to f(x, y) \end{aligned}$$

telle que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}$ sont définies dans un voisinage du point (a, b) et continues en ce point.

Posons $\lambda = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(a, b)$,

et $g(x, y) = f(x, y) - \lambda xy$

$h(x) = g(x, b + v) - g(x, b)$.

$$\begin{aligned} A(u, v) &= h(a + u) - h(a) \\ &= f(a + u, b + v) - f(a, b + v) - f(a + u, b) + f(a, b) - \lambda uv \end{aligned}$$

$\dfrac{\partial^2 g}{\partial x\,\partial y}$ est continue en (a,b) et $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x\,\partial y}(a,b) = 0$.

Soit $\varepsilon > 0$: il existe $\alpha > 0$ tel que si $\|(x,y) - (a,b)\| < \alpha$, alors

$$\left|\frac{\partial^2 g}{\partial x\,\partial y}(x,y)\right| = \left|\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)(x,y)\right| < \varepsilon. \tag{1}$$

Soit (x,y) tel que $\|(x,y) - (a,b)\| < \dfrac{\alpha}{2}$ et (u,v) tel que $\|(u,v)\| < \dfrac{\alpha}{2}$. On a alors $\|(x,b+v) - (a,b)\| < \alpha$. En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction

$$z \to \frac{\partial g}{\partial x}(x,z)$$

sur l'intervalle $[x, b+v]$, on déduit de (1) :

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,b+v) - \frac{\partial g}{\partial x}(x,b)\right| < \varepsilon|v|,$$

c'est-à-dire

$$|h'(x)| < \varepsilon|v|. \tag{2}$$

En appliquant de nouveau le théorème des accroissements finis à la fonction h sur l'intervalle $[a, a+u]$, il résulte de (2) :

$$|A(u,v)| = |h(a+u) - h(a)| < \varepsilon|v|\,|u|.$$

D'où $\left|\dfrac{A(u,v)}{uv}\right| < \varepsilon$. On a donc montré que $\displaystyle\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{A(u,v)}{uv} = 0$.

Maintenant posons $\mu = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(a,b)$ et

$$B(u,v) = f(a+u, b+v) - f(a+u, b) - f(a, b+v) + f(a,b) - \mu uv.$$

On montre de même que : $\displaystyle\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{B(u,v)}{uv} = 0$. Et ainsi on a :

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{A(u,v) - B(u,v)}{uv} = \lambda - \mu = 0$$

donc $\lambda = \mu$.

5.7.3.2. Formule de Taylor

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable de classe C^r sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$; soient a et b deux éléments de Ω tels que le segment $[a,b]$ soit contenu dans Ω. On pose $b = a + u$; considérons la fonction

$$F : [0,1] \to \mathbb{R}$$
$$t \to F(t) = f(a + tu)$$

D'après le théorème 5.6.1, $F(t)$ admet des dérivées jusqu'à l'ordre p continues. La formule de Mac-Laurin d'ordre p donne pour $t = 0$ et $t = 1$.

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2!}F''(0) + \cdots + \frac{1}{p!}F^{(p)}(\theta), \text{ avec } 0 < \theta < 1. \tag{1}$$

$$F'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + tu)u_i$$

$$F''(t) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}(a + tu)u_i u_j.$$

$F''(t)$ peut s'écrire symboliquement sous la forme : $\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + tu)u_i\right]^{(2)}$.

En posant $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^{(2)} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ et $\frac{\partial f^{(1)}}{\partial x_i}\frac{\partial f^{(1)}}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_i} = \frac{\partial f^{(1)}}{\partial x_j}\frac{\partial f^{(1)}}{\partial x_i}$, par un raisonnement par récurrence on montre qu'on peut écrire :

$$F^{(p)}(t) = \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + tu)u_i\right]^{(p)}.$$

En posant

$$\frac{\partial f^{(r_1)}}{\partial x_{i_1}} \times \frac{\partial f^{(r_2)}}{\partial x_{i_2}} \times \cdots \frac{\partial f^{(r_p)}}{\partial x_{i_p}} = \frac{\partial^{(r_1+r_2+\ \ +r_p)} f}{\partial x_{i_1}^{n_1} \cdots \partial x_{i_p}^{n_p}}.$$

la formule (1) s'écrit alors :

$$\boxed{\begin{aligned} f(b) &= f(a) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(b_i - a_i) + \frac{1}{2!}\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(b_i - a_i)\right]^{(2)} + \cdots \\ &\cdots + \frac{1}{(p-1)!}\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(b_i - a_i)\right]^{(p-1)} + \frac{1}{p!}\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(c)(b_i - a_i)\right]^{(p)} \end{aligned}} \tag{2}$$

où c est un point du segment ouvert $]a, b[$.

Remarques

1) Pour $n = 2$ et $p = 2$, la formule (2) s'écrit :

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) &= f(x_0, y_0) + hf'_x(x_0, y_0) + kf'_y(x_0, y_0) \\ &+ \frac{1}{2}\left[h^2 f''_{x^2}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta h) + 2hk f''_{xy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)\right. \\ &\left. + k^2 f''_{y^2}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)\right] \end{aligned} \tag{3}$$

2) En utilisant la continuité des dérivées partielles d'ordre 2, (3) peut s'écrire, en posant $M = (x_0 + h, y_0 + k)$ et $M_0 = (x_0, y_0)$:

$$f(M) = f(M_0) + (hf'_x + kf'_y)(M_0) + \frac{1}{2}(h^2 f''_{x^2} + 2hkf''_{xy} + k^2 f''_{y^2})(M_0)$$
$$+ (h^2 + k^2)\varepsilon(h, k), \quad \text{avec} \lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h, k) = 0 \quad (4)$$

(4) donne le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de $M_0 = (x_0, y_0)$.

5.7.3.3. Application à la recherche des extrémums

Soit f une fonction définit sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Par définition f admet un maximum local en $M_0(x_0, y_0)$, si $f(M) \leq f(M_0)$ pour tout point M appartenant à un voisinage de M_0. Si $f(M) \geq f(M_0)$, f admet un minimum local.

Proposition — Si f admet des dérivées partielles d'ordre 1 en $M_0(x_0, y_0)$ et si M_0 est un extremum local alors

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

Preuve — En effet posons $h_1(x) = f(x, y_0)$ et $h_2(y) = f(x_0, y)$. h_1 et h_2 admettent un extrémum respectivement en x_0 et y_0. Donc :

$$h'_1(x_0) = f'_x(x_0, y_0) = 0 \quad \text{et} \quad h'_2(y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

Remarque — Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une application différentiable de classe C^2 sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$. D'après la proposition précédente, si f admet un extremum en $M_0 \in \Omega$, alors $f'_x(M_0)$ et $f'_y(M_0)$ sont nulles. Mais cette condition n'est pas suffisante pour affirmer que f admet un extremum en M_0. Par exemple si f est la fonction $(x, y) \to x^3 + y^3$, alors $f'_x(0,0) = 0$ et $f'_y(0,0) = 0$, mais $(0,0)$ ne correspond pas à un extremum local, car dans n'importe quel voisinage de $(0,0)$, il existe des points vérifiant $f(x, y) < f(0,0)$ et d'autres points tels que $f(x, y) > f(0,0)$.

Si $f'_x(M_0)$ et $f'_y(M_0)$ sont nulles, pour vérifier que f admet un extremum en M_0, on utilise souvent la formule de Taylor :

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0)$$
$$+ \frac{1}{2}\left(h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_0) + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(M_0) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M_0)\right) + (h^2 + k^2)\varepsilon(h, k)$$
$$\text{avec} \lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h, k) = 0.$$

Pour $M(x_0+h, y_0+k)$ assez voisin de M_0, $\Delta f = f(M) - f(M_0)$ a le même signe que $\rho(h, k) = ph^2 + 2rhk + qk^2$, où $p = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_0)$, $q = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_0)$ et $r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(M_0)$, lorsque ces dérivées partielles ne sont pas toutes nulles

$\rho(h,k)$ est un polynôme de degré 2 en h. Il gardera un signe constant si $r^2 - pq < 0$; dans ce cas, on a :

- $f(M) - f(M_0) > 0$ si $p > 0$ et f admet un minimum local en M_0.
- $f(M) - f(M_0) < 0$ si $p < 0$ et f admet un maximum local en M_0.

Si $r^2 - pq > 0$, $\rho(h,k)$ ne garde pas un signe constant : f n'admet pas d'extremum en a.

Exemple — Trouver les extremums de la fonction $f(x,y) = 2x + 8y - x^2 - 2y^2$.

$f'_x = 2(1-x)$; $f'_y = 4(2-y)$.

$f'_x(M_0) = f'_y(M_0) = 0 \iff M_0 = (1,2)$.

$f''_{x^2}(M_0) = -2$ et $\left[f''_{x^2}f''_{y^2} - (f''_{xy})^2\right](M_0) = (-2)(-4) = 8 > 0$, d'où M_0 est un maximum pour f.

5.8. Fonctions implicites Formes différentielles

5.8.1. Théorème (des fonctions implicites)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur Ω.

Soit l'équation $f(x,y) = 0$ (1). On suppose que :

1) il existe $(a,b) \in \Omega$ tel que $f(a,b) = 0$,

2) $f'_y(a,b) \neq 0$.

Alors il existe un intervalle $[a_1, a_2]$ centré en a et une fonction continue

$$\begin{aligned} \varphi : [a_1, a_2] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \varphi(x) \end{aligned}$$

telle que : $f(x, \varphi(x)) = 0$ $\forall x \in [a_1, a_2]$ et $b = f(a)$. En outre φ est dérivable sur $]a_1, a_2[$ et on a :

$$\varphi'(x) = -\frac{f'_x\,(x, \varphi(x))}{f'_y\,(x, \varphi(x))}, \quad \forall x \in]a_1, a_2[.$$

φ est dite <u>fonction implicite définie par l'équation (1).</u>

Preuve

1) Supposons par exemple $f'_y(a,b) > 0$. Comme f'_y est continue, il existe un voisinage $W(a,b) = [a'_1, a'_2] \times [b_1, b_2]$ de (a,b) tel que $f'_y(x,y) > 0$

pour tout $(x, y) \in W(a, b)$. La fonction $(x, y) \mapsto \frac{f'_x}{f'_y}(x, y)$ est bien définie et continue sur $W(a, b)$, f'_x et f'_y étant continues dans cet ensemble.

Si $W(a, b)$ est assez petit, alors il existe un réel $k > 0$ tel que :

$$\left|\frac{f'_x}{f'_y}(x, y)\right| \leq k, \quad \forall (x, y) \in W(a, b). \tag{1}$$

2) D'après le théorème des accroissements finis on a :

$$\begin{aligned} f(a, b_2) &= f(a, b) + (b_2 - b)f'_y(a, c_2), \text{ où } c_2 \in]b, b_2[\\ &= (b_2 - b)f'_y(a, c_2) \end{aligned}$$

Comme $f'_y(a, c_2) > 0$, alors $f(a, b_2) > 0$. De même

$$\begin{aligned} f(a, b_1) &= f(a, b) + (b_1 - b)f'_y(a, c_1) \\ &= (b_1 - b)f'_y(a, c_1), \text{ avec } c_1 \in]b_1, b[\end{aligned}$$

d'où $f(a, b_1) < 0$. Comme les fonctions $x \mapsto f(x, b_1)$ et $x \mapsto f(x, b_2)$ sont continues, il existe un intervalle centré en a, $[a_1, a_2] \subset [a'_1, a'_2]$, tel que $f(x, b_2) > 0$ et $f(x, b_1) < 0$ pour tout $x \in [a_1, a_2]$.

En posant $V(a, b) = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2]$, l'inégalité (1) de 1) est encore vérifiée sur $V(a, b)$.

3) Pour tout $x \in [a_1, a_2]$, considérons la fonction

$$\begin{aligned} \varphi_x : [b_1, b_2] &\to \mathbb{R} \\ y &\mapsto \varphi_x(y) = f(x, y) \end{aligned}$$

φ_x est continue et dérivable sur $[b_1, b_2]$ et on a $\varphi'_x(y) = f'_y(x, y)$.

Les inégalités $\varphi_x(b_1) < 0$ et $\varphi_x(b_2) > 0$ entraînent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'existence d'un point $y_x \in [b_1, b_2]$ tel que $\varphi_x(y_x) = 0$.

Puisque $\varphi'_x(y) > 0$, $y \in [b_1, b_2]$, φ est strictement croissante sur l'intervalle $[b_1, b_2]$. Donc y_x est l'unique point de cet intervalle vérifiant $\varphi_x(y_x) = 0$.

Ainsi la correspondance $x \mapsto y_x$ définit bien une application sur l'intervalle $[a_1, a_2]$. Notant φ cette application, on a : $\varphi(a) = b$, $f(x, \varphi(x)) = 0$ pour tout $x \in [a, b]$.

4) φ est continue sur $[a_1, a_2]$. En effet soit $x_0 \in [a_1, a_2]$, x_0 fixé. $V(a, b)$ étant convexe, pour tout $x \in [a_1, a_2]$, il existe d'après le théorème des accroissements finis, un point C_x appartenant au segment ouvert reliant $(x_0, \varphi(x_0))$ et $(x, \varphi(x))$ tel que :

$$0 = f(x, \varphi(x)) - f(x_0, \varphi(x_0)) = (x - x_0)f'_x(C_x) + (\varphi(x) - \varphi(x_0))\, f'_y(C_x)$$

D'où

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| = |x - x_0| \left| \frac{f'_x(C_x)}{f'_y(C_x)} \right| \leq k|x - x_0| \quad \text{d'après (1)}$$

Par suite si x tend x_0, $\varphi(x)$ tend vers $\varphi(x_0)$: et φ est continue en x_0.

5) φ est dérivable sur $]a_1, a_2[$. Soit $x \in [a_1, a_2]$, x fixé. Soit h assez petit de sorte que $x + h \in]a_1, a_2[$. D'après la continuité de φ on a :

$$\varphi(x + h) = \varphi(x) + \varepsilon(h), \quad \text{avec} \quad \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

D'autre part d'après la formule des accroissements finis, il existe θ, $0 < \theta < 1$, tel que:

$$\begin{aligned} 0 &= f(x + h, \varphi(x + h)) - f(x, \varphi(x)) \\ &= hf'_x(x + \theta h, \varphi(x) + \theta\varepsilon(h)) + (\varphi(x + h) - \varphi(x)) f'_y(x + \theta h, \varphi(x) + \theta\varepsilon(h)) \end{aligned}$$

D'où $\dfrac{\varphi(x + h) - \varphi(x)}{h} = -\dfrac{f'_x(x + \theta h, \varphi(x) + \theta\varepsilon(h))}{f'_y(x + \theta h, \varphi(x) + \theta\varepsilon(h))}$: quand $h \to 0$, le second membre tend vers $-\dfrac{f'_x(x, \varphi(x))}{f'_y(x, \varphi(x))}$, les fonctions f'_x et f'_y étant continues et $f'_y(x, \varphi(x)) > 0$. Par suite φ est dérivable en x et on a :

$$\varphi'(x) = -\frac{f'_x(x, \varphi(x))}{f'_y(x, \varphi(x))}.$$

5.8.2. Remarques

1) On peut généraliser le résultat précédent aux fonctions de n variables, $n \geq 2$, (avec une démonstration analogue). Par exemple si $f(x, y, z)$ est une fonction de classe C^1 vérifiant $f'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ et $f(x_0, y_0, z_0) = 0$, il existe un voisinage ouvert V de (x_0, y_0) et une application

$$\begin{aligned} \varphi : V &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \varphi(x, y) \end{aligned}$$

telle que : $z_0 = \varphi(x_0, y_0)$ et $f(x, y, \varphi(x, y)) = 0 \ \forall (x, y) \in V$. φ est différentiable sur V et on a :

$$\begin{aligned} \varphi'_x(x, y) &= -\frac{f'_x(x, y, \varphi(x, y))}{f'_z(x, y, \varphi(x, y))} \\ \varphi'_y(x, y) &= -\frac{f'_y(x, y, \varphi(x, y))}{f'_z(x, y, \varphi(x, y))} \end{aligned} \qquad (1)$$

2) Si on sait que φ est différentiable, on peut trouver les relations (1) aisément. En effet soit le changement des variables

$$* \begin{cases} x &= x \\ y &= y \\ z &= \varphi(x, y) \end{cases}$$

on a : $*f = f(x, y, \varphi(x, y)) = 0$ sur V.

$$\begin{aligned} \mathrm{d}*f &= *\mathrm{d}f \\ &= *\left(f'_x \,\mathrm{d}x + f'_y \,\mathrm{d}y + f'_z \,\mathrm{d}z\right) \\ &= *f'_x \,\mathrm{d}*x + *f'_y \,\mathrm{d}*y + *f'_z \,\mathrm{d}*z \\ &= (*f'_x + *f'_z\varphi'_x)\,\mathrm{d}x + (*f'_y + *f'_z\varphi'_y)\,\mathrm{d}y = 0 \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} *f'_x + *f'_z\varphi'_x &= 0 \\ *f'_y + *f'_z\varphi'_y &= 0 \end{aligned}$$

3) L'équation $f(x, y) = 0$ définit implicitement une courbe $\mathscr{C}$ de $\mathbb{R}^2$. En un point $(x_0, y_0) \in \Omega$ tel que $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$, $y = \varphi(x)$ est une représentation cartésienne de $\mathscr{C}$ au voisinage de x_0. L'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point (x_0, y_0) est

$$y - y_0 = \varphi'(x_0)(x - x_0) = -\frac{f'_x(x_0, y_0)}{f'_y(x_0, y_0)}(x - x_0).$$

4) Soit f une fonction numérique de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$. L'ensemble des points M dont les coordonnées vérifient l'équation $f(x, y, z) = 0$ est une surface (S) de $\mathbb{R}^3$.

Trois fonctions $x = x(t)$, $y = y(t)$ et $z = z(t)$ dérivables sur un intervalle I, représentent paramétriquement une courbe Γ de (S) si :

$$F(t) = f(x(t), y(t), z(t)) = 0 \quad \text{pour tout} \quad t \in I.$$

La relation $*\mathrm{d}f = \mathrm{d}*f = 0$, où $* \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ montre que le vecteur $\vec{N} = \left(f'_x(x(t), y(t), z(t)), f'_y(x(t), y(t), z(t)), f'_z(x(t), y(t), z(t))\right)$ est normal à Γ en $M(t) = (x(t), y(t), z(t))$.

Ainsi les courbes de (S) passant par un point M_0 ont leurs tangentes en ce point situées dans un plan P_0 passant par M_0 et perpendiculaire à $\vec{N_0} = (f'_x(M_0), f'_y(M_0), f'_z(M_0))$ appelé *plan tangent* à (S) en M_0. $\vec{N_0}$ est le vecteur normal à (S) en $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Le plan P_0 a pour équation :

$$\boxed{(x - x_0)f'_x(M_0) + (y - y_0)f'_y(M_0) + (z - z_0)f'_z(M_0) = 0}$$

Si l'équation de (S) est donnée sous la forme :
$z = \varphi(x, y)$ ou $z - \varphi(x, y) = 0$, alors

$$\vec{N_0} = (-\varphi'_x(x_0, y_0), -\varphi'_y(x_0, y_0), 1) \tag{1}$$

et P_0 a pour équation : $z - z_0 = \varphi'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + \varphi'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$.

5.8.3. Formes différentielles

On traitera ici pour la simplicité des notations les fonctions de deux variables. Les définitions et résultats pourront être aisément étendus aux fonctions de plusieurs variables. Si $f :\subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est différentiable sur Ω, alors :

$$\mathrm{d}\, f = f'_x(x, y)\, \mathrm{d}\, x + f'_y(x, y)\, \mathrm{d}\, y.$$

Par extension on a :

5.8.3.1. Définition

On appelle forme différentielle de degré 1 sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ toute combinaison linéaire

$$\omega(x, y) = P(x, y)\, \mathrm{d}\, x + Q(x, y)\, \mathrm{d}\, y$$

des différentielles $\mathrm{d}\, x$ et $\mathrm{d}\, y$, P et Q étant des fonctions sur Ω.

5.8.3.2. Définition

Soient deux formes différentielles $\omega_1 = P_1\, \mathrm{d}\, x + Q_1\, \mathrm{d}\, y$ et $\omega_2 = P_2\, \mathrm{d}\, x + Q_2\, \mathrm{d}\, y$ définies sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$. Par définition :

i) $\omega_1 = \omega_2 \iff \begin{cases} P_1 = P_2 \\ Q_1 = Q_2 \end{cases}$

ii) $\omega_1 + \omega_2 = (P_1 + P_2)\, \mathrm{d}\, x + (Q_1 + Q_2)\, \mathrm{d}\, y$

iii) $f\omega_1 = (fP_1)\, \mathrm{d}\, x + (fQ_1)\, \mathrm{d}\, y$, si f est une fonction définie sur Ω

5.8.3.3. Définition

Une forme différentielle ω définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ est dite *exacte* s'il existe une fonction f différentiable sur Ω telle que $\omega = \mathrm{d}\, f$.

5.8.3.4. Définitions et remarques

i) Une équation différentielle du 1^er ordre est une équation de la forme :

$$\omega = P(x, y)\, \mathrm{d}\, x + Q(x, y)\, \mathrm{d}\, y = 0. \tag{1}$$

ii) Une solution de (1) est une fonction $*y = \varphi(x)$ définie sur un intervalle I, telle que

$$*\omega = 0 \tag{2}$$

ou encore, ce qui est équivalent, $P(x, \varphi(x)) + Q(x, \varphi(x))\varphi'(x) = 0$ pour tout $x \in I$.

iii) Le graphe d'une solution de (1) est appelé une courbe intégrale de (1).

Soit Γ une courbe intégrale de (1) d'équation $y = \varphi(x)$. L'équation (2) exprime que le vecteur $\overrightarrow{V} = (P(x,\varphi(x)), Q(x,\varphi(x)))$ est normal à Γ au point $M(x,\varphi(x))$.

iv) Si la forme ω est exacte, c'est-à-dire si $\omega = \mathrm{d}f$ l'équation (1) devient :

$$\omega = \mathrm{d}f = f'_x \,\mathrm{d}x + f'_y \,\mathrm{d}y = 0. \tag{1'}$$

Si le domaine de définition de f est convexe, les solutions de (1') sont les fonctions définies implicitement par :

$$f(x,y) = k, \quad \text{où } k \text{ est une constante.} \tag{2'}$$

5.8.3.5. Remarques

1) si l'équation (1) est de la forme :

$$\omega = a(x)\,\mathrm{d}x - b(y)\,\mathrm{d}y. \tag{3}$$

elle est dite à variables séparables. Dans ce cas, si $A(x)$ (resp $B(y)$) est une primitive de $a(x)$ (resp de $b(y)$), la fonction $f(x,y) = A(x) - B(y)$ vérifie $\omega = \mathrm{d}f$; donc ω est exacte et les solutions de (3) sont définies implicitement par l'équation $A(x) - B(y) = k$, où k est une constante.

2) Soit $\omega = P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$ une forme différentielle exacte sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire :

$$\omega = \mathrm{d}f, \tag{4}$$

où f est une fonction différentiable sur Ω. Si f est de classe C^2 on voit facilement que (4) entraîne :

$$P'_y(x,y) = Q'_x(x,y) \tag{5}$$

Réciproquement on montre que la condition (5) entraîne que ω est exacte.

5.8.3.6. Exemples

Intégrer les équations différentielles :

1) $x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y = 0$,

2) $x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = 0$.

En posant $f(x,y) = x^2 + y^2$, les solutions de 1) sont définies par l'équation implicite : $x^2 + y^2 = k$ car 1) $\Longleftrightarrow$ $f'_x\,\mathrm{d}x + f'_y\,\mathrm{d}y = 0$. D'où les fonctions $y = \sqrt{k - x^2}$ et $y = -\sqrt{k - x^2}$ sont solutions de 1). La solution dont le graphe est $(0,0)$ est dite solution singulière.

De même pour 2) la solution dont le graphe est $(0,0)$ est une solution singulière.

Pour $x \neq 0$, 2) est équivalente à : $\dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}y - \dfrac{y}{x^2}\,\mathrm{d}x = f'_x\,\mathrm{d}x + f'_y\,\mathrm{d}y = 0$, où $f(x,y) = \dfrac{y}{x}$. D'où les solutions sont données par $\dfrac{y}{x} = k$, k étant une constante.

5.9. À RETENIR

1 — Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction sur Ω. On note $(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

1.1 — Dérivée partielle de f par rapport à la variable x_i, au point x_0 :

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t\epsilon_i) - f(x_0)}{t}}$$

si cette limite existe.

1.2 — f est différentiable en x_0, si et seulement si :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + L(x - x_0) + ||x - x_0||\varepsilon(x - x_0)$$

où $L \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x - x_0) = 0$. $L = \mathrm{d}f(x_0)$ est la différentielle de f en x_0 et

$$\boxed{\mathrm{d}f(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\,\mathrm{d}x_i}$$

où $\mathrm{d}x_i$ est la différentielle de l'application $x \to x_i$.

1.3 — Existence de la différentielle en x_0. Si les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ sont définies dans un voisinage de x_0 et continues en x_0, alors f est différentiable en x_0.

2 — Différentielle d'une fonction composée

Soient $f : \Omega \to \mathbb{R}$, différentiable en x_0, et $g : I \subset \mathbb{R} \to \Omega \subset \mathbb{R}^n$, dérivable en t_0, avec $g(t_0) = x_0$. Alors $F = fog$ est dérivable en t_0 et on a :

$$F'(t_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) g_i'(t_0). \tag{1}$$

La formule (1) s'écrit : $*\mathrm{d}f = \mathrm{d}{*f}$ où$*$ est le changement de variable $x = g(t)$.

3 — Formule des accroissements finis

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ différentiable sur Ω. Alors pour tout couple d'éléments a, b de Ω tels que $[a, b] \subset \Omega$, il existe θ $(0 < \theta < 1)$, tel que :

$$f(b) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\theta b + (1 - \theta)a)\,(b^i - a^i)$$

4 — Théorème de Schwartz

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction.

Si deux dérivées partielles d'ordre $p (p \geq 2)$ de f sont définies dans un voisinage de $a \in \Omega$ et continues en a, et si elles ne diffèrent que par l'ordre des dérivations, alors elles sont égales en ce point.

5 — Formule de Taylor

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^p sur Ω. Alors pour tout couple de points a, b de Ω tel que $[a, b] \subset \Omega$, on a :

$$f(b) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(b^i - a^i) + \frac{1}{2!}\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(b^i - a^i)\right]^{(2)}$$
$$+ \dots \frac{1}{(p-1)!}\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(b^i - a^i)\right]^{(p-1)}$$
$$+ \frac{1}{p!}\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(c)(b^i - a^i)\right]^{(p)}.$$

où c est un point du segment ouvert $]a, b[$.

6 — Théorème des fonctions implicites

Soit

$$\begin{aligned} f : \Omega &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto f(x, y) \end{aligned}$$

une fonction de classe C^1 sur un ouvert de Ω de $\mathbb{R}^2$. Soit l'équation :

$$f(x, y) = 0 \tag{1}$$

On suppose que :

1) il existe $(a, b) \in \Omega$ tel que $f(a, b) = 0$,

2) $f'_y(a, b) \neq 0$.

Alors il existe un intervalle $[a_1, a_2]$ centré en a et une fonction $\varphi : [a_1, a_2] \to \mathbb{R}$ continue telle que :

$$f(x, \varphi(x)) = 0, \forall x \in [a_1, a_2] \text{ et } b = f(a).$$

φ est dérivable sur $]a_1, a_2[$ et on a : $\varphi'(x) = -\dfrac{f'_x(x, \varphi(x))}{f'_y(x, \varphi(x))}$.

La fonction φ est dite *fonction implicite* définie par l'équation (1).

5.10. Exercices et problèmes

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

a) f est elle continue en $(0,0)$?

b) Montrer que $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $x \to f(x, \lambda x)$ admet une limite quand x tend vers 0.

2) Soit la fonction Φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\Phi(t) = 1$ si t est rationnel, et 0 sinon. On considère la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto x^2\Phi(x) + y^2\Phi(y) \end{aligned}$$

a) Montrer que f est continue et différentiable en $(0,0)$.

b) f est-elle continue, différentiable sur $\mathbb{R}^2$?

3) Soit la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(t) = t^2 \sin \dfrac{1}{t}$ si $t \neq 0$ et $u(0) = 0$. On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}^2$ par $F(x,y) = u(x) + u(y)$. Montrer que F est différentiable mais que les dérivées partielles ne sont continues.

4) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = xy$ si $|y| \leq |x|$, $f(x,y) = -xy$ si $|y| > |x|$. Montrer que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(0,0)$ existent et sont différents.

5) Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes, et calculer leurs dérivées partielles si elles existent :

$$f(x,y) = x^2 \sin^2 y; \qquad g(x,y) = \operatorname{Arctg} \sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y}} \quad (1)$$

$$h(x,y) = \operatorname{Log}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}+x}\right); \qquad u(x,y) = e^{\frac{x}{y}} + e^{\frac{z}{y}} \quad (2)$$

6) Étudier les extremums des fonctions suivantes :

i) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$,

ii) $g(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

7) Trouver trois nombres positifs dont la somme est égale à un nombre positif a donné, et dont le produit est maximum.

8) Donner l'équation du plan tangent et l'équation de la normale à la sphère

$S_2 = \{(x,y,z)/x^2+y^2+z^2 = 9\}$ au point $P(1,2,2)$.

9) Soit l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(0,0) = 0, \quad f(x,y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0)$$

i) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

ii) f est-elle de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$?

10) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^p et homogène de degré p $\quad (f(tx) = t^p f(x), \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^*)$.

i) En utilisant la formule de Taylor pour f au voisinage de 0, montrer que

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t>0}} \left(f(x) - \sum_{k=0}^{p} t^{k-p} P_k(x) \right) = 0$$

où $P_k(x) = \dfrac{1}{k!} \left[\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(O) \right]^{(k)}$.

ii) En déduire que $f(x) = P_p(x)$.

11) Montrer que la relation $e^{x-y} = 1 + x + y$ définit implicitement une fonction φ telle que $y = \varphi(x)$, au voisinage de $(0,0)$. Déterminer φ' et φ'' au voisinage de $(0,0)$ et en déduire

$$\lim_{x \to 0} \frac{\varphi(x)}{x^2}.$$

12) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = y^3 + xy - e^x$. On considère la relation suivante : $f(x,y) = 0$.

a) Montrer que cette relation définit, au voisinage du point $A(0,1)$, la variable y comme fonction implicite de la variable x.

b) Montrer que cette fonction admet, au voisinage de 0, un développement limité à l'ordre deux. Déterminer ce développement.

13) Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une application différentiable de classe C^1. On suppose qu'en tout point (x,y,z), $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) \neq 0$. Soit S la surface définie par $f(x,y,z) = 0$.

a) Montrer que pour tout point $M \in \mathbb{R}^3$, la dérivée partielle de f par rapport à un vecteur $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ noté $d_{\vec{u}} f(M)$ est maximale quand $\vec{u} = \overrightarrow{grad} f(M)$.

b) Montrer que $d_{\vec{u}} f(M) = 0$ pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace tangent à S en M.

Chapitre 6 : INTÉGRALE AU SENS DE RIEMANN

6.1. Intégrale d'une fonction bornée définie sur un segment : Définitions et propriétés

6.1.1. Définition

6.1.1.1. Définition

Soit $[a, b]$ $(a \leq b)$ un segment. On appelle subdivision de $[a, b]$ toute suite finie strictement croissante $\sigma = (a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b)$. n est la longueur de σ. Dans la suite on confondra, la suite σ et l'ensemble $S = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$ qu'on appellera aussi : subdivision de $[a, b]$.

Soit $S = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ une subdivision de $[a, b]$, $x_0 = a, x_n = b$ et $x_i < x_{i+1}$, pour $0 \leq i < n$.. On appelle pas de S, le nombre $\varpi(S) = \operatorname{Sup}(x_{i+1} - x_i), 0 \leq i < n$.

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction. $S = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ un élément de l'ensemble D des subdivisions de $[a, b]$.

$$\begin{aligned}
\text{On pose} \quad H &= \operatorname*{Sup}_{x \in [a,b]} |fx)| \\
m &= \inf_{x \in [a,b]} f(x) \\
M &= \operatorname*{Sup}_{x \in [a\ b]} f(x) \\
m_i &= \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) \qquad (0 \leq i < n) \\
\text{et,} \quad M_i &= \operatorname*{Sup}_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) \qquad (0 \leq i < n).
\end{aligned}$$

On appelle somme de Darboux inférieure de f relativement à S le nombre réel $\underline{S}(f, S) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i)$, et somme de Darboux supérieure de f relativement à S le nombre réel $\overline{S}(f, S) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i)$.

Pour tout $S \in D$, et pour tout $S' \in D$, on a : $m(b-a) \leq \underline{S}(f,S) \leq \overline{S}(f,S) \leq M(b-a)$.

6.1.1.2. Définition

On appelle intégrale supérieure de f sur $[a,b]$ le réel

$\overline{I}(f) = \inf\left(\overline{S}(f,S)\right)$, et intégrale inférieure de f sur $[a,b]$ le réel

$\underline{I}(f) = \operatorname{Sup} \underline{S}(f,S)$, $S \in D$.

Théorème (de Darboux)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que, pour toute subdivision S de $[a,b]$, telle que $\varpi(S) < \eta$, on ait :

$$\underline{S}(f,S) \geq \underline{I}(f) - \varepsilon \text{ et } \overline{S}(f,S) \leq \overline{I}(f) + \varepsilon.$$

Démonstration

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe une subdivision $S' = \{x'_0, x'_1, \ldots, x'_n\}$ de $[a,b]$ telle que :

$$\overline{S}(f,S) \leq \overline{I}(f) + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{où } \overline{S}(f,S') = \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)M'_i,$$

$$M'_i = \operatorname*{Sup}_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) (0 \leq i < n)$$

Posons : $\eta_1 = \dfrac{\varepsilon}{8n(H+1)}$, où $H = \operatorname*{Sup}_{x\in[a,b]} |f(x)|$, $\eta_2 = \dfrac{1}{2} \inf_{0 \leq i < n} (x'_{i+1} - x'_i)$, et $\eta' = \inf(\eta_1, \eta_2)$.

Soit $S = \{x_0, x_1, \ldots, x_m\}$ une subdivision de $[a,b]$ de pas $\varpi(S) < \eta$. Pour tout i, $0 \leq i < n$, il existe p $(0 < p < m)$ tel que: $x_{p-1} \leq x'_i < x_p < \cdots < x_q < x'_{i+1} \leq x_{p+1}$. La portion en S_i de la somme $\overline{S}(f,S) = \sum\limits_{k=0}^{m-1} (x_{k+1} - x_k)M_k$, où : $M_k = \operatorname*{Sup}\limits_{x\in[x_k, x_{k+1}]} f(x)$, qui correspond au segment $[x'_i, x'_{i+1}]$, $(0 \leq i < n)$, est :

$$S_i \leq (x_p - x'_i)M_{p-1} + \cdots + (x_q - x_{q-1})M_{q-1} + (x'_{i+1} - x_q)M_q.$$

On a : $S_i \leq (x_p - x'_i)M_{p-1} + (x_q - x_p)M'_i + (x'_{i+1} - x_q)M_q$, car :

$M_p \leq M'_i, M_{p+1} \leq M'_i, \ldots, M_q \leq M'_i$, ce qui entraîne :

$S_i \leq (x'_{i+1} - x'_i)M'_i + (x_p - x'_i)(M_{p-1} - M'_i) + (x'_{i+1} - x_q)(M_q - M'_i)$,

d'où : $S_i \leq (x'_{i+1} - x'_i)M'_i + 2H(x_p - x'_i) + 2H(x'_{i+1} - x_q)$,

et : $S_i \leq (x'_{i+1} - x'_i)M'_i + 2H\eta' + 2H\eta' = (x'_{i+1} - x'_i)M'_i + 4H\eta'$.

Il résulte de ces inégalités que : $\overline{S}(f,S) = \sum_{i=0}^{n-1} S_i \le \sum_{i=0}^{n-1}(x'_{i+1} - x'_i)M'_i +$ $4nH\eta'$, ce qui entraîne : $\overline{S}(f,S) \le \overline{S}(f,S') + \frac{\varepsilon}{2}$, car : $4nH\eta' \le \frac{4nH\varepsilon}{8n(H+1)}$.
On a donc: $\overline{S}(f,S) \le \overline{I}(f) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$, d'où: $\underline{S}(f,S) \le \underline{I}(f) + \varepsilon$.

On démontre de la même manière que, pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe $\eta'' > 0$ tel que pour toute subdivision S de $[a,b]$, l'inégalité $\overline{\omega}(S) < \eta''$ implique $\underline{S}(f,S) \ge \underline{I}(f) - \varepsilon$.

En prenant $\eta = \inf(\eta', \eta'')$, alors pour toute subdivision S de $[ab]$, l'inégalité $\overline{\omega}(S) < \eta$ implique : $\overline{S}(f,S) \le \overline{I}(f) + \varepsilon$ et $\underline{S}(f,S) \ge \underline{I}(f) - \varepsilon$.
Conséquence :

Si (S_n) est une suite de subdivisions de $[a,b]$ telle que $\lim_{n\to+\infty} \overline{\omega}(S_n) =$ 0, alors:

$$\lim_{n\to+\infty} \overline{\omega}(f,S_n) = \overline{I}(f) \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \underline{S}(f,S_n) = \underline{I}(f).$$

6.1.1.3. Définition

Soit f une fonction définie et bornée sur le segment $[a,b]$. On dit que f est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$ si $\overline{I}(f) = \underline{I}(f)$: cette valeur commune $I(f)$ sera alors notée $I(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$, et appelée l'intégrale de f sur $[ab]$.

6.1.1.4. Théorème (Caractérisation des fonctions intégrables)

Soit f une fonction définie et bornée sur un intervalle $[a,b]$. Alors f est intégrable sur $[a,b]$ si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour toute subdivision $S = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ de $[a,b]$, l'inégalité $\omega(S) < \eta$ entraîne :

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i (x_{i+1} - x_i) < \varepsilon.$$

où $\omega_i = \sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x) - \inf_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x)$, est l'oscillation de f dans $[x_i, x_{i+1}]$.

Démonstration — Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour toute subdivision S de $[a,b]$, l'inégalité $\overline{\omega}(S) < \eta$ implique les inégalités $\overline{S}(f,S) \le \overline{I}(f) + \frac{\varepsilon}{2}$ et $\underline{S}(f,S) \ge \underline{I}(f) - \frac{\varepsilon}{2}$.

Montrons que la condition est nécessaire : si $\overline{I} = \underline{I}$, des inégalités $0 \le \overline{S}(f,S) - I < \frac{\varepsilon}{2}$ et $0 \le I - \underline{S}(f,S) < \frac{\varepsilon}{2}$, on déduit, pour $\overline{\omega}(S) < \eta$, que :

$$0 \le \overline{S}(f,S) - \underline{S}(f,S) < \varepsilon.$$

Ce qui s'écrit :

$$0 \leq \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i (x_{i+1} - x_i) < \varepsilon.$$

Montrons que la condition est suffisante. Soit $\varepsilon > 0$, et soit $\eta > 0$ tel que pour toute subdivision $S = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$ vérifiant $\underline{\omega}(S) < \eta$, l'on ait $\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i (x_{i+1} - x_i) < \varepsilon$.

Pour une telle subdivision S on a : $\overline{S}(f, S) - \underline{S}(f, S) < \varepsilon$. Or : $\overline{I} \leq \overline{S}(f, S)$ et $\underline{S}(f, S) \leq \underline{I}$, donc $0 \leq \overline{I} - \underline{I} \leq \overline{S}(f, S) - \underline{S}(f, S) < \varepsilon$.

Exemples:

1) Si $f(x) = c$ pour tout $x \in [a, b]$, alors f est intégrable sur $[a, b]$ et $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = c(b - a)$.

2) Soit f la fonction bornée sur $[0, 1]$ définie par :

$f(x) = -1$ si $x \in [0, 1] \cap Q$ et $f(x) = 1$ si $x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$.

Pour toute subdivision $S = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[0, 1]$ et pour tout i, $0 \leq i < n$, il résulte de la densité dans $\mathbb{R}$ de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, que $\operatorname*{Sup}_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) = 1$ et $\inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) = -1$

D'où $0 \leq \overline{S}(f, S) - \underline{S}(f, S) = 2$. Il en résulte que cette fonction f n'est pas intégrable sur $[01]$.

Conséquences :

1 — Si f est une fonction définie et bornée sur un intervalle $[a, b]$, on peut imposer à toutes les subdivisions S de $[a, b]$ de contenir des points fixés à l'avance sans modifier l'intégrabilité ou la non intégrabilité de f.

2 — Si f est une fonction définie et bornée sur un intervalle $[a, b]$, et intégrable sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$, $(a < c < b)$, alors f est intégrable sur $[a, b]$ et $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}\,x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$.

3 — Si une fonction f, définie et bornée sur $[a, b]$, est intégrable sur $[a, b]$, alors pour tout c, $(a \leq c \leq b)$, f est intégrable sur $[a, c]$.

6.1.1.5. Proposition

— Si f est bornée et intégrable sur $[a, b]$ d'intégrale I, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$, tel que pour toute subdivision $S = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a\ b]$, l'inégalité $\overline{\omega}(S) < \eta$ entraîne :

$$\left| I - \sum_{i=0}^{n-1} \mu_i (x_{i+1} - x_i) \right| < \varepsilon. \qquad \forall \mu_i \in [m_i, M_i],$$

avec: $m_i = \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x)$ et $M_i = \operatorname*{Sup}_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x)$.

Démonstration :

Étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour toute subdivision S de pas $\varpi(S) < \eta$, l'on ait :

$$\overline{S}(f,S) \leq \overline{I} + \varepsilon \text{ et } \underline{S}(f,S) > \underline{I} - \varepsilon.$$

Pour une telle subdivision S on a :

$$-\varepsilon < I - \overline{S}(f,S) \leq I - \sum_{i=0}^{n-1} \mu_i (x_{i+1} - x_i) \leq I - \underline{S}(f,S) < \varepsilon.$$

Conséquence :

Si f est bornée et intégrable sur $[a,b]$, alors:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left[\sum_{k=0}^{n-1} f(a + \frac{k(a-b)}{n})\right] \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left[\sum_{k=0}^{n-1} f(a + \frac{k(a-b)}{n})\right].\end{aligned}$$

Notons $\mathscr{B}_{[a,b]}$ l'ensemble des fonctions bornées sur $[a,b]$ et $\mathscr{I}_{[a,b]}$ l'ensemble des fonctions bornées et intégrables sur $[a,b]$.

6.1.2. Propriétés

6.1.2.1. Proposition

Soient $f, g, \in \mathscr{I}_{[a,b]}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

1) $f+g \in \mathscr{I}_{[a,b]}$ et $\displaystyle\int_a^b (f+g)(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

2) $\lambda f \in \mathscr{I}_{[a,b]}$ et $\displaystyle\int_a^b (\lambda f)(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Démonstration :

1) Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\tau > 0$ tel que, pour toute subdivision S de $[a\ b]$ l'inégalité $\varpi(S) < \eta$ entraîne :

$$0 \leq \overline{S}(f,S) - \underline{S}(f,S) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } 0 \leq \overline{S}(g,S) - \underline{S}(g,S) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour $\varpi(S) < \eta$ on a donc :

$$0 \leq \overline{S}(f+g,S) - \underline{S}(f+g,S) \leq \overline{S}(f,S) + \overline{S}(g,S) - \underline{S}(f,S) - \underline{S}(g,S).$$

ce qui entraîne :

$$0 \leq \overline{S}(f+g,S) - \underline{S}(f+g,S) \leq (\overline{S}(f,S) - S(f,S)) + (\overline{S}(g,S) - \underline{S}(g,S)).$$

d'où : $0 \leq \overline{S}(f+g,S) - \underline{S}(f+g,S) < \varepsilon$.

Par suite $f+g$ est intégrable sur $[a,b]$ et on a :

$$\begin{aligned}
&\int_a^b (f+g)(x)\,\mathrm{d}x = \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left[\sum_{k=0}^{n-1}(f+g)\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right] \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left[\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) + f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right] \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left[\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right] + \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left[f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right] \\
&= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

2) Si $\lambda \geq 0$, pour toute subdivision S de $[a,b]$, on a :

$\overline{S}(\lambda f,S) = \lambda\overline{S}(f,S)$ et $\underline{S}(\lambda f,S) = \lambda\underline{S}(f,S)$.

d'où : $\overline{I}\lambda f) = \lambda\overline{I}(f)$ et $\underline{I}(\lambda f) = \lambda\underline{I}(f)$.

Si $\lambda < 0$, pour toute subdivision S de $[a,b]$, on a :

$\overline{S}(\lambda f,S) = \lambda\underline{S}(f,S)$ et $\underline{S}(\lambda f,S) = \lambda\overline{S}(f,S)$, d'où :

$\overline{I}(\lambda f) = \lambda\underline{I}(f)$ et $\underline{I}(\lambda f) = \lambda\overline{I}(f)$.

Dans tous les cas, si f est intégrable sur $[a,b]$, on a donc : $\overline{I}(\lambda f) = \underline{I}(\lambda f)$ et par suite :

$$\int_a^b (\lambda f)(x)\,\mathrm{d}x = \lambda\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Conséquence :

$\mathscr{I}_{[a,b]}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et l'application : $I : \mathscr{I}_{[a,b]} \to \mathbb{R}$
$f \mapsto I(f)$ est linéaire.

6.1.2.2. Proposition

Si $f, g \in \mathscr{I}_{[a,b]}$, alors $fg \in \mathscr{I}_{[a,b]}$.

Démonstration — Supposons d'abord $f \geq 0$ et $g \geq 0$ sur $[a,b]$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme f et g sont intégrables sur $[a,b]$, il existe $\eta > 0$ tel que pour toute subdivision $S = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b\}$ de $[a,b]$ de pas $\varpi(S) < \eta$, l'on ait :

$$\sum_{i=0}^{n-1}(M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) < \frac{\varepsilon}{2(1+H')}.$$

et

$$\sum_{i=0} n - 1(M_i' - m_i')(x_{i+1} - x_i) < \frac{\varepsilon}{2(1+H)}.$$

avec $M_i = \underset{x\in[x_i,x_{i+1}]}{\text{Sup}} f(x),$

$m_i = \underset{x\in[x_i,x_{i+1}]}{\inf} f(x),$

$H = \underset{0\leq i\leq n-1}{\text{Sup}} M_i,$

$M_i' = \underset{x\in[x_i,x_{i+1}]}{\text{Sup}} g(x),$

$m_i' = \underset{x\in[x_i,x_{i+1}]}{\inf} g(x),$

$H' = \underset{0\leq i\leq n-1}{\text{Sup}} M_i'.$

Posons : $D_i = \underset{x\in[x_i,x_{i+1}]}{\text{Sup}} f(x)g(x)$, $d_i = \underset{x\in[x_i,x_{i+1}]}{\inf} f(x)g(x)$, on a les inégalités : $0 \leq D_i - d_i \leq M_iM_i' - m_im_i'$, d'où

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1}(D_i - d_i)(x_{i+1} - x_i) &\leq \sum_{i=0}^{n-1}(M_i'M_i - m_i'm_i)(x_{i+1} - x_i)\\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1}\left[(M_i - m_i)M_i' + (M_i' - m_i')m_i\right](x_{i+1} - x_i).\end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1}(D_i - d_i)(x_{i+1} - x_i) \leq H'\sum_{i=0}^{n-1}(M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i)\\ + H\sum_{i=0}^{n-1}(M_i' - m_i')(x_{i+1} - x_i).\end{aligned}$$

d'où

$$\sum_{i=0}^{n-1}(D_i - d_i)(x_{i+1} - x_i) \leq \frac{H'\varepsilon}{2(1+H')} + \frac{H\varepsilon}{2(1+H)} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

— Supposons maintenant que f et g sont deux fonctions bornées et intégrables quelconques sur $[a,b]$. Posons $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ et $m' = \inf_{x\in[a,b]} g(x)$.

On a alors : $fg = (f-m)(g-m')+m'f+mg-mm'$, d'où l'intégrabilité de fg, car $(f-m)$ et $(g-m)$ sont positives sur $[a,b]$.

6.1.2.3. Proposition:

Si $f \in \mathscr{I}_{[a,b]}$ alors: $f^+ = \mathrm{Sup}(f,0) \in \mathscr{I}_{[a,b]}$ et $f^- = \inf(f,0) \in \mathscr{I}_{[a,b]}$.

Démonstration — Soit une subdivision $S = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b\}$ de $[a,b]$, on pose $M_i = \mathrm{Sup}_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x)$, $m_i = \inf_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x)$, $D_i = \mathrm{Sup}_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f^+(x)$, $d_i = \inf_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f^+(x)$

Soit $\varepsilon > 0$, f étant intégrable sur $[a,b]$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour toute subdivision $S = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b\}$ de $[a,b]$ de pas inférieur à η, l'on ait $\sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) \leq \varepsilon$.

Si $M_i \leq 0$, alors $D_i = d_i = 0$, et on a $0 = D_i - d_i \leq M_i - m_i$,

si $m_i \geq 0$, alors $D_i = M_i$ et $d_i = m_i$ et on a $0 \leq D_i - d_i = M_i - m_i$,

si $M_i \geq 0$ et $m_i \leq 0$, alors $D_i = M_i$ et $d_i = 0$ et on a : $0 \leq D_i - d_i \leq M_i - m_i$.

Donc, dans tous les cas on a $0 \leq D_i - d_i \leq M_i - m_i$, d'où $\sum_{i=0}^{n-1} (D_i - d_i)(x_{i+1} - x_i) \leq \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) < \varepsilon$, et l'intégrabilité de f^+ en résulte.

L'intégrabilité de f^- sur $[a,b]$ résulte du fait que $f^- = -(-f)^+$.

Corollaire 1 — Si $f \in \mathscr{I}_{[a,b]}$, alors $|f| \in \mathscr{I}_{[a,b]}$.

Démonstration : Ce résultat s'obtient en remarquant que $|f| = f^+ - f^-$.

Corollaire 2 — Si $f, g \in \mathscr{I}_{[a,b]}$, alors $\mathrm{Sup}(f,g)$, $\inf(f,g) \in \mathscr{I}_{[a,b]}$.

Démonstration : Ce résultat s'obtient en remarquant que: $\mathrm{Sup}(f,g) = \frac{1}{2}(|f-g| + f + g)$, $\inf(f,g) = -\mathrm{Sup}(-f,-g)$.

6.1.2.4. Proposition

Soient f et g deux fonctions définies, bornées et intégrables sur $[a\ b]$.

1) Si $f(x) \geq 0\ \forall x \in [a\ b]$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$.

2) Si $f(x) \geq g(x)$ $\forall x \in [a\ b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

3) $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Démonstration :

1) Si $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [a\ b]$, alors pour toute subdivision S de $[a, b]$ on a $\overline{S}(f, S) \geq 0$, d'où

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{I}(f) \geq 0.$$

2) D'après 1), on a : $\displaystyle\int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x \geq 0$; or

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x, \text{ donc}$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

3) On a $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ $\forall x \in [a\ b]$, donc

$$-\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Il en résulte que $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

6.2. Exemples fondamentaux de fonctions intégrables

6.2.1. Proposition

Toute fonction continue f sur un intervalle $[a, b]$ est intégrable sur $[a, b]$.

Démonstration — f étant continue sur $[a, b]$, elle est bornée sur $[a, b]$. D'autre part, d'après le théorème de Heine, f est uniformément continue sur $[a, b]$.

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout couple (x, x') de $[a\ b] \times [a, b]$, l'inégalité $|x - x'| < \eta$ entraîne $|f(x) - f(x')| < \dfrac{\varepsilon}{b - a + 1}$.

Soit $S = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b\}$ une subdivision de $[a, b]$ de pas strictement inférieur à η. Alors, pour tout i, $0 \leq i \leq n-1$, il existe $y_i \in [x_i, x_{i+1}]$ et $z_i \in [x_i, x_{i+1}]$ tels que $M_i = \displaystyle\operatorname*{Sup}_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) = f(y_i)$ et $m_i = \displaystyle\inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) = f(z_i)$.

On a alors $(M_i - m_i) = |f(y_i) - f(z_i)| < \dfrac{\varepsilon}{b-a+1}$, car $|y_i - z_i| < \eta$.

D'où $\sum_{i=0}^{n-1}(M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) \leq \dfrac{\varepsilon}{b-a+1}\sum_{i=0}^{n-1} x_{i+1} - x_i = \dfrac{(b-a)\varepsilon}{b-a+1} < \varepsilon$.

ε étant quelconque, ceci prouve que f est intégrable sur $[a, b]$.

6.2.2. Proposition

Toute fonction monotone sur un intervalle $[a, b]$ est intégrable sur $[a, b]$.

Démonstration. On suppose f croissante. Dans le cas contraire, on se ramène à cette hypothèse en considérant la fonction $g = -f$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{b-a}{n_0} < \dfrac{\varepsilon}{f(b) - f(a) + 1}$.

Soit $S = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b\}$ une subdivision de $[a, b]$ de pas inférieur à $\eta = \dfrac{b-a}{n_0}$.

Alors on a

$$\sum_{i=0}^{n-1} [f(x_{i+1}) - f(x_i)]\,(x_{i+1} - x_i) \leq \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} [f(x_{i+1}) - f(x_i)].$$

ce qui entraîne :

$$\sum_{i=0}^{n-1} [f(x_{i+1}) - f(x_i)]\,(x_{i+1} - x_i) \leq \frac{b-a}{n}\,[f(b) - f(a)] < \varepsilon.$$

D'où l'intégrabilité de f sur $[a, b]$.

6.2.3. Fonctions continues par morceaux

6.2.3.1. Définition

Une fonction f définie sur un intervalle $[a, b]$ est dite continue par morceaux sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $S = \{c_0 = a, c_1, \dots, c_n = b\}$ de $[a, b]$ telle que pour $0 \leq i \leq n-1$, la restriction de f à $]x_i, x_{i+1}[$ est continue.

6.2.3.2. Proposition

Si f est continue par morceaux et est bornée sur $[a, b]$, alors f est intégrable sur $[a, b]$.

Démonstration — Soit : $a = c_0 < c_1 < \cdots < c_{n+1} < c_n = b$ la suite finie croissante des extrémités des intervalles de la partition associée à f.

Pour montrer que f est intégrable sur $[a, b]$, il suffit de montrer que, pour tout $k (0 \leq k \leq n-1)$, f est intégrable sur $[c_k, c_{k+1}]$.

Considérons $[c_k, c_{k+1}](0 \leq k \leq n-1)$ et soit $\eta > 0$ tel que $c_k < c_k + \eta < c_{k+1} - \eta < c_{k+1}$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue sur $[c_k + \eta, c_{k+1} - \eta]$, il existe donc une subdivision $S' = \{x'_0 = c_k + \eta, x'_1, \dots, x'_n = c_{k+1} - \eta\}$ telle que $\sum\limits_{i=0}^{n-1} \omega'_i(x_{i+1} - x_i) < \frac{\varepsilon}{2}$, où $\omega'_i = M_i - m_i$ est l'oscillation de f sur $[x'_i, x'_{i+1}](0 \leq i \leq n-1)$.

Soit $S = \{x_0 = c_k, x_1, \dots, x_m = c_{k+1}\}$ une subdivision de $[c_k, c_{k+1}]$ de pas inférieur à celui de S'. En notant $H = \sup\limits_{x \in [a, b]} |f(x)|$ et ω_i l'oscillation de f sur $[x_i, x_{i+1}]$, on a :

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i(x_{i+1} - x_i) \leq H\left[(c_k + \eta) - c_k\right] + \sum_{i=0}^{n-1} \omega'_i(x'_{i+1} - x'_i) + H\left[c_{k+1} - (c_{k+1} - \eta)\right]$$

ce qui entraîne : $\sum\limits_{i=0}^{n-1} \omega_i(x_{i+1} - x_i) \leq \eta H + \frac{\varepsilon}{2} + \eta H$,

d'où $\sum\limits_{i=0}^{n-1} \omega_i(x_{i+1} - x_i) \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2\eta H$.

Pour que l'on ait $\sum\limits_{i=0}^{n-1} \omega_i(x_{i+1} - x_i) \leq \varepsilon$, il suffit donc de choisir η tel que $\eta < \frac{\varepsilon}{4(H+1)}$.

6.2.4. Fonctions en escalier

6.2.4.1. Définition

Une fonction f définie sur un intervalle $[a, b]$ est dite en escalier s'il existe une subdivision $D = \{c_0 = a < c_1 < \cdots < c_{k-1} < c_k = b\}$ de $[a, b]$ telle que pour tout i $(0 \leq i \leq k-1)$, la valeur de f sur $[x_i + x_{i+1}[$ est une constante A_i.

6.2.4.2. Proposition

Soit f une fonction en escalier sur $[a, b]$. Alors f est intégrable sur $[a, b]$ et si $D = \{c_0 = a < c_1 < \cdots < c_{k-1} < c_k = b\}$ est une subdivision de $[a, b]$ telle que $f([c_i, c_{i+1}[) = \{A_i\}$ pour tout $i(0 \leq i \leq k-1)$, alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = \sum_{i=0}^{k-1} A_i(c_{i+1} - c_i).$$

Démonstration — L'intégrabilité de f résulte du fait que f est continue par morceaux sur $[a, b]$. Pour tout $i(0 \leq i \leq k-1)$, posons

$$g_i(x) = \begin{cases} A_i & \text{si } x \in [c_i, c_{i+1}[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$g_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [a,b[\\ g_k(b) = f(b) \end{cases}$$

On a $f = g_0+g_1+\cdots+g_{k-2}+g_k$. Comme les fonctions g_i $(0 \leq i \leq k)$ sont escalier sur $[a,b]$, elles sont intégrables sur $[a,b]$: il suffit donc de montrer que, pour tout $i(0 \leq i \leq k)$,

$$\int_a^b g_i(x)\,\mathrm{d}x = A_i(c_{i+1}-c_i),\ (0 \leq i \leq k-1) \text{ et que } \int_a^b g_k(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Soit $i \in \{0,1,\ldots,k-1\}$ fixé, et soit $S = \{x_0 = a < x_1 < \cdots < x_m = b\}$ une subdivision de $[a,b]$. On suppose $A_i \geq 0$.

Soit $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_{n_i} \leq c_i < x_{n_i+1} < \cdots < x_{n_{i+j}} \leq c_{i+1} < x_{n_{i+j+1}} < \cdots < x_m = b$.

On a :

$$\begin{aligned}\overline{S}(g_i,S) = 0\left[(x_1-x_0)+\cdots+(x_{n_i}-x_{n_{i+1}})\right] \\ + A_i\left[(x_{n_{i+1}}-x_{n_i})+\cdots+(x_{n_{i+j+1}}-x_{n_{i+j}})\right] \\ + 0\left[(x_{n_{i+j+2}}-x_{n_{i+j+1}})+\cdots+(x_m-x_{m-1})\right]\end{aligned}$$

ce qui entraîne :

$$\overline{S}(g_i,S) = A_i(x_{n_{i+j+1}}-x_{n_i}) \geq A_i(c_{i+1}-c_i).$$

De même on a : $\underline{S}(g_i,S) \leq 0[(x_1-x_0)+\cdots+(c_i-x_{n_i})]+A_i[(x_{n_{i+1}}-c_i)+\cdots+(c_{i+1}-x_{n_{i+j}})]+0[(x_{n_{i+j+1}}-c_{i+1})+\cdots+(x_m-x_m-1)]$, ce qui entraîne :

$$\underline{S}(g_i,S) \leq A_i(c_{i+1}-c_i).$$

Comme g_i est intégrable sur $[a,b]$, il en résulte que $\int_a^b g_i(x)\,\mathrm{d}x = \overline{I}(g_i) = \underline{I}(g_i) = A_i(c_{i+1}-c_i)$. Supposons $g_k(b) = f(b) \geq 0$ et soit $S = \{x_0 = a, x_1, \cdots, x_{m-1}, x_m\}$ une subdivision de $[a,b]$.

On a : $\underline{S}(g_k,S) = 0(x_1-x_0)+0(x_2-x_1)+\cdots+0(x_m-x_{m-1}) = 0$

donc : $\displaystyle\int_a^b g_k(x)\,\mathrm{d}x = \underline{I}(g_i) = 0.$

Par conséquent : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{k}\int_a^b g_i(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{k-1} A_i(c_{i+1}-c_i).$

6.2.5. Théorème

Si f est une limite uniforme d'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies, bornées et intégrables sur $[a,b]$, alors f est intégrable sur $[a,b]$ et on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (*)$$

Démonstration :

a) Montrons d'abord que f est intégrable sur $[a, b]$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$f_{n_0}(x) - \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \leq f(x) \leq f_{n_0}(x) + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}, \qquad \forall x \in [a, b].$$

Il en résulte que : $f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y) - \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)} \leq f(x) - f(y) \leq f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y) + \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$, $\forall x, y \in [a, b]$. Comme f_{n_0} est intégrable sur $[a, b]$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour toute subdivision

$$S = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_{m-1}, x_m = b\} \quad \text{de}\,[a, b]$$

de pas inférieur à η, on ait :

$$\sum_{i=0}^{m-1} \omega'_i (x_{i+1} - x_i) < \frac{\varepsilon}{2}$$

où $\omega'_i = \sup\limits_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f_{n_0}(x) - \inf\limits_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f_{n_0}(x)$ est l'oscillation de f_{n_0} sur $[x_i, x_{i+1}]$; notant ω_i l'oscillation de f sur $[x_i, x_{i+1}]$, on a :

$$\omega'_i - \frac{\varepsilon}{1(b-a)} \leq \omega_i \leq \omega'_i + \frac{\varepsilon}{1(b-a)}$$

$$\sum_{i=0}^{m-1} \omega'_i (x_{i+1} - x_i) \leq \sum_{i=0}^{m-1} \omega'_i + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{i=0}^{m-1} (x_{i+1} - x_i) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

f est donc intégrable sur $[a, b]$.

b) Montrons maintenant que (*) est vrai. Soit $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall x \geq n_0$, l'on ait :

$$f_n(x) - \frac{\varepsilon}{b-a} \leq f(x) \leq f_n(x) + \frac{\varepsilon}{b-a}$$

donc : $\displaystyle\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon \leq \int_a^b f(x) \leq \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon$, pour $n \geq n_0$

d'où : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

6.2.6. Fonctions réglées

6.2.6.1. Définition

Une fonction numérique f définie sur un intervalle $[a, b]$ est dite réglée sur $[a, b]$, si f est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier sur $[a, b]$. Il résulte du théorème précédent que :

6.2.6.2. Proposition

Toute fonction réglée définie sur un intervalle $[a, b]$ est intégrable sur $[a, b]$.

6.2.6.3. Proposition

Si f est réglée sur $[a, b]$, alors l'ensemble des points de discontinuité de f est dénombrable.

Démonstration — Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions en escalier convergeant uniformément vers f sur $[a, b]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit H_n l'ensemble fini des points de discontinuité de g_n, et soit $H = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n$. H est un ensemble dénombrable.

Si $x \in [a, b]\backslash H$, les fonctions g_n sont toutes continues au point x, donc f est aussi continue au point x d'après le théorème 2.2.9.2.9 chapitre 2. Il en résulte que l'ensemble D des points de discontinuité de f est contenu dans H, et est donc dénombrable.

6.2.6.4. Théorème (Caractérisation des fonctions réglées)

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle $[a, b]$. Alors f est réglée sur $[a, b]$ si et seulement si f admet en tout point de $[a, b[$ une limite à droite et en tout point de $]a, b]$ une limite à gauche.

Démonstration — Supposons f réglée et soit $x \in [a, b[$. Pour $\varepsilon > 0$, il existe une fonction en escalier g sur $[a, b]$ telle $\sup_{t\in[a,b]} |f(t) - g(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Soit $\eta > 0$ tel que g soit constante sur $]x, x + \eta[$. Pour tout $(y, y') \in]x, x+\eta[\times]x, x+\eta[$ on a : $|f(y) - f(y')| \leq |f(y) - g(y)| + |g(y) - g(y')| + |g(y') - f(y')| < \varepsilon$.

Il en résulte que f admet une limite à droite au point x. On démontre de la même manière que f admet une limite à gauche en tout point de $]a, b]$.

Supposons que f admette en tout point de $[a, b[$ une limite à droite et en tout point de $]a, b]$ une limite à gauche. Soit $\varepsilon > 0$, pour tout $x \in [a, b[$, il existe $d_x \in \mathbb{R}, d_x > x$ tel que $]x, d_x[\subset [a, b[$ et, pour tout couple (y, y') d'éléments de $[x, dx[$, $|f(y) - f(y')| < \varepsilon$.

Pour tout $x \in]a, b]$, il existe $c_x \in \mathbb{R}, c_x < x$ tel que $]c_x, x[\subset]a, b]$ et, pour tout couple (y, y') d'éléments de $]c_x, x[$, $|f(y) - f(y')| < \varepsilon$. Les intervalles $]-\infty, d_a[$, $]c_b, +\infty[$ et $]c_x, d_x[$, $x \in]a, b[$, recouvrent l'intervalle fermé borné $[a, b]$: il existe donc des points $x_1, x_2, \ldots, x_k$ de $]a, b[$, tels que :

$$[a, b] = [a, d_a[\cup]c_{x_1}, d_{x_1}[\cup\cdots\cup]c_{x_k}, d_{x_k}[\cup]c_b, b].$$

Notons S l'ensemble des points $a, b, c_{x_i}, d_{x_i}, x_i$, $1 \leq i \leq k$, que l'on range en une suite strictement croissante $a = a_0, a_1, \ldots, a_n = b$. Pour $0 \leq i \leq n-1$, soit θ_i un élément de $]a_i, x_{i+1}[$, et soit g la fonction en escalier définie sur $[a, b]$ de la manière suivante : pour $k = 0, 1, \ldots, n$, $g(a_k) = f(a_k)$. Si $x \in]a_i, x_{i+1}[$ $(0 \leq i \leq n-1)$ $g(x) = f(\theta_i)$. Pour tout $x \in [a, b]$, on a $|g(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Corollaire : Toute fonction monotone sur un segment $[a, b]$ est réglée. En effet une fonction monotone admet en tout point de son domaine de définition une limite à gauche et une limite à droite quand cela a un sens.

Notation : Si f est intégrable sur $[a, b]$ avec $a < b$, on note $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}\,x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$.** Et on pose : $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}\,x = 0$.

Propriétés :

Soient f et g deux fonctions intégrables sur un intervalle $[a, b]$, avec $a \leq b$.

1) Si $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [a, b]$ sauf peut-être en un nombre fini de points de $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x \geq 0.$$

2) Si $g(x) \leq f(x)$ $\forall x \in [a, b]$ sauf peut-être en un nombre fini de points de $[a, b]$, alors

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}\,x \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x.$$

3) $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}\,x$

4) Si $c \in [a, b]$ $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}\,x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$.

6.3. Primitives

6.3.1. Proposition

Soit f une fonction numérique définie et intégrable sur un intervalle $[a, b]$. Alors la fonction F définie en tout point x de $[a, b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}\,t$ est uniformément continue sur $[a, b]$.

Démonstration.— Soient x et y deux éléments de $[a, b]$, $x < y$. On a $F(x) - F(y) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}\,t - \int_a^y f(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}\,t - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}\,t - \int_x^y f(t)\,\mathrm{d}\,t$

donc : $|F(x) - F(y)| = \left|\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}\,t\right| \leq \int_x^y |f(t)|\,\mathrm{d}\,t \leq k|x - y|$.

où $k = \sup\limits_{t\in[a,b]} |f(t)|$.

6.3.2. Proposition

Soit f une fonction numérique intégrable sur un intervalle $[a, b]$ et soit $t_0 \in [a, b]$ tel que f admette en t_0 une limite à droite (resp. à gauche). Alors la fonction :

$$F : [a, b] \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est dérivable à droite (resp. à gauche) en t_0 et sa dérivée à droite (resp. à gauche) en t_0 est égale à la limite de f quand t tend vers t_0 par valeurs supérieures (resp. par valeurs inférieures).

Démonstration — Montrons par exemple que F est dérivable à droite en t_0 si f admet une limite à droite quand t tend vers t_0. Posons $l = \lim\limits_{\substack{t \to t_0 \\ t < t_0}} f(t)$.

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $t \in]t_0, t_0 + \eta[$ l'on ait $|f(t) - l| < \varepsilon$.

On a alors, pour $t \in]t_0, t_0 + \eta[$, $F(t) - F(t_0) = \displaystyle\int_{t_0}^t f(x)\,\mathrm{d}x$.

Comme : $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$ pour tout $x \in]t_0, t_0 + \eta[$, on a :

$(t - t_0)(l - \varepsilon) \leq F(t) - F(t_0) \leq (t - t_0)(l + \varepsilon)$,

ce qui entraîne : $\left|\dfrac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} - l\right| < \varepsilon$ pour tout $t \in]t_0, t_0 + \eta[$.

D'où : $\lim\limits_{\substack{t \to t_0 \\ t < t_0}} \dfrac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} = l$.

Corollaire 1 — Si f est une fonction réglée sur $[a, b]$, alors la fonction $F(t) = \displaystyle\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$ admet en tout point de $[a, b[$ une dérivée à droite, et en tout point de $]a, b]$ une dérivée à gauche.

Corollaire 2— Si f est continue sur $[a, b]$ alors la fonction $F(t) = \displaystyle\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$ est dérivable sur $[a, b]$ et $F'(t) = f(t)$ pour tout $t \in [a, b]$.

6.3.3. Définition

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On appelle primitive de f sur I toute application $F : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I et telle que $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in I$.

6.3.4. Proposition

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et admettant une primitive F sur I, alors toute autre primitive G de f sur I est de la forme $G = F + c$ où c est une constante réelle.

Démonstration — La fonction $x \to G(x) - F(x)$ est dérivable sur I, et $\forall x \in I$ $G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$, donc il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $G(x) - F(x) = c$ pour tout élément x de I.

6.3.5. Proposition

Toute fonction numérique définie continue sur un intervalle I admet une primitive dans cet intervalle.

Démonstration — Soit $c \in I$. D'après le corollaire de la proposition 6.3.2 l'application $x \mapsto F(x) = \displaystyle\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}\,t$ est une primitive de f sur I.

Théorème : Soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$ et admettant une primitive G sur $[a, b]$. Alors :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = G(b) - G(a)$$

Démonstration : La fonction $x \mapsto F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}\,t$ étant une primitive de f sur $[a, b]$, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $F(x) = G(x) + c$ pour tout x de I, et on a

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = F(b) - F(a) = (G(b) + c) - (G(a) + c) = G(b) - G(a).$$

Notation : Si g est une fonction définie sur $[a, b]$ on note $[g(t)]_a^b = g(b) - g(a)$.

Exemple 1 : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\ \mathrm{d}\,x = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$

Exemple 2 : $\displaystyle\int_2^7 \frac{1}{x}\ \mathrm{d}\,x = [\operatorname{Log} x]_2^7 = \operatorname{Log} 7 - \operatorname{Log} 2 = \operatorname{Log}\frac{7}{2}.$

Notation : Si f est une fonction continue sur un intervalle I, on désigne par $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}\,x$ toute primitive de f sur I. Si F est une primitive de f sur I, on a $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}\,x = F(x) + c$.

On donne dans le tableau suivant les primitives F de quelques fonctions usuelles f sur intervalle I.

f	F	I
x^n ($n \in \mathbb{N}$)	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$\mathbb{R}$
x^{-n} ($n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$)	$\dfrac{x^{-n+1}}{-n+1} + c$	$\mathbb{R}^*$
x^r ($r \in \mathbb{R}$ et $r \neq -1$)	$\dfrac{x^{r+1}}{r+1} + c$	$\mathbb{R}_+^*$

f	F	I
x^{-1}	$\mathrm{Log}\,\lvert x\rvert + c$	$\mathbb{R}^*$
e^x	$e^x + c$	$\mathbb{R}$
a^x $(a>0,\ a\neq 1)$	$\dfrac{a^x}{\mathrm{Log}\,a} + c$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x + c$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x + c$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{tg}\,x$	$-\mathrm{Log}\,\lvert\cos x\rvert + c$	$\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$
$\mathrm{cotg}\,x$	$\mathrm{Log}\,\lvert\sin x\rvert + c$	$\mathbb{R}\setminus\{k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\mathrm{Arcsin}\,x + x$	$]-1,1[$
$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\mathrm{Arccos}\,x + c$	$]-1,1[$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{Arctg}\,x + c$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{sh}\ x$	$\mathrm{ch}\ x + c$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{ch}\ x$	$\mathrm{sh}\ x + c$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\mathrm{Arg\ sh}\ x + c =$ $\mathrm{Log}(x+\sqrt{x^2+1}) + c$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\mathrm{Arg\ ch}\ x + c =$ $\mathrm{Log}\,(x+\sqrt{x^2-1}) + c$	$]1,+\infty[$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\mathrm{Log}\left\lvert x+\sqrt{x^2-1}\right\rvert + c$	$]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$
$\dfrac{1}{1-x^2}$	$\mathrm{Arg}\ x + c =$ $\dfrac{1}{2}\mathrm{Log}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) + c$	$]-1,1[$
$\dfrac{1}{1-x^2}$	$\dfrac{1}{2}\mathrm{Log}\left\lvert\dfrac{1+x}{1-x}\right\rvert + c$	$\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$

6.4. Formules de la moyenne

6.4.1. Proposition

Soient f et g deux fonctions intégrables sur un intervalle $[a,b]$. On suppose que $f(x) \geq 0$ sauf peut être pour un nombre fini d'éléments de $[a,b]$ et que $m \leq g(x) \leq M$ sauf peut être pour un nombre fini d'éléments de $[a,b]$. Alors on a l'égalité suivante :

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}\,x = k\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}\,x \qquad \text{où} \quad m \leq k \leq M$$

appelée formule de la moyenne.

Démonstration : On a $mf(x) \leq g(x)f(x) \leq Mf(x)$ sauf peut-être pour un nombre fini d'éléments de $[a,b]$, d'où: $m\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x \leq \int_a^b g(x)f(x)\,\mathrm{d}\,x \leq M\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$.

Comme la fonction $t \mapsto t\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$ est continue sur $[m,M]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $k \in [m,M]$ tel que $\int_a^b g(x)f(x)\,\mathrm{d}\,x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$.

Remarque: si la fonction g est continue, il existe, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, un point c de $[a,b]$ tel que $k = g(c)$, d'où :

Corollaire 1 (première formule de la moyenne) : Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a,b]$. On suppose que g est continue sur $[a,b]$ et que $f(x) \geq 0$ sauf peut être pour un nombre fini d'éléments de $[a,b]$. Alors il existe $c \in [a,b]$ tel que: $\int_a^b g(x)f(x)\,\mathrm{d}\,x = g(c)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$.

Corollaire 2 : Si g est une fonction continue sur $[a,b]$, alors il existe $c \in [a,b]$ tel que $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}\,x = (b-a)g(c)$.

On obtient ce résultat en prenant dans l'égalité du corollaire 1, $f(x) = 1\ \forall x \in [a,b]$.

6.4.2. Proposition (deuxième formule de la moyenne)

Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a,b]$. On suppose f positive et décroissante sur $[a,b]$. Alors il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b g(x)f(x)\,\mathrm{d}\,x = f(a)\int_a^c g(x)\,\mathrm{d}\,x.$$

Démonstration. Soit $S = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$ une subdivision de

$[a, b]$ et soit G la fonction définie sur $[a, b]$ par $G(x) = \displaystyle\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout $x \in [a, b]$.

On a $G(x_{i+1}) - G(x_i) = \displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}} g(t)\,\mathrm{d}t = k_i(x_{i+1} - x_i)$
où $m_i = \displaystyle\inf_{x\in[x_i, x_{i+1}]} f(x) \leq k_i \leq \sup_{x\in[x_i, x_{i+1}]} f(x) = M_i$.

Posant $A(S) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} k_i f(x_i)(x_{i+1} - x_i)$, on va montrer que :

$$\lim_{\omega(S)\to 0}\left(A(S) - \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)g(x_i)(x_{i+1} - x_i)\right) = 0.$$

On a :

$$\begin{aligned}
\left|A(S) - \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)g(x_i)(x_{i+1} - x_i)\right| &= \left|\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\left(k_i - g(x_i)\right)(x_{i+1} - x_i)\right| \\
&\leq \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_i)|\,|k_i - g(x_i)|\,|x_{i+1} - x_i| \\
&\leq f(a)\sum_{i=0}^{n-1}(M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i),
\end{aligned}$$

et comme g est intégrable on a : $\displaystyle\lim_{\omega(S)\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}(M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) = 0$, d'où $\displaystyle\int_a^b g(x)f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\omega(s)\to 0} A(S)$. Or

$$\begin{aligned}
A(S) = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)k_i(x_{i+1} - x_i) &= \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\left(G(x_{i+1}) - G(x_i)\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} G(x_i)\left(f(x_{i+1}) - f(x_i)\right) + G(x_n) - G(x_{n-1})
\end{aligned}$$

car $G(x_0) = G(a) = 0$.

Posons $m = \displaystyle\inf_{x\in[a,b]} G(x)$ et $M = \displaystyle\sup_{x\in[a,b]} G(x)$, on obtient $m \cdot f(a) \leq A(S) \leq M \cdot f(a)$, et par suite

$$f(a)\cdot m \leq \lim_{\omega(S)\to 0} A(S) = \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leq f(a)\cdot M.$$

Comme G est continue sur $[a, b]$, il existe $c \in [a, b]$ tel que :

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(a)G(c) = f(a)\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

6.5. Changement de variable Intégration par parties

6.5.1. Changement de variable

Théorème. Soit φ une fonction numérique définie, continue et dérivable sur un intervalle $[a, b]$. On suppose φ' continue sur $[a, b]$. Alors pour toute fonction numérique f définie et continue sur le segment $\varphi([a, b])$, on a la formule appelée *formule de changement de variables* :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f[\varphi(x)]\varphi'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration — Comme φ est continue sur $[a, b]$, $\varphi([a, b])$ est un segment. Considérons sur $\varphi([a, b])$ la fonction $u \mapsto F(u) = \displaystyle\int_{\varphi(a)}^{u} f(x)dx$. Alors les fonctions

$$t \mapsto H(t) = F[\varphi(t)] = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(t)} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\text{et } t \mapsto G(t) = \int_a^t f[\varphi(x)]\;\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$$

sont définies continues et dérivables sur $[a, b]$ et on a, pour tout $t \in [a, b]$, $H'(t) = \varphi'(t)\cdot f[\varphi(t)]$ et $G'(t) = \varphi'(t)f[\varphi(t)]$. Il en résulte que $H'(t) = G'(t)$ pour tout $t \in [a, b]$, d'où

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = H(b) = G(b) = \int_a^b f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exemples :

1 — Soient a et b deux réels, $1 < a < b$. Pour calculer $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{x(\operatorname{Log} x)^2}\,\mathrm{d}x$, on pose $t = \operatorname{Log} x$, d'où $\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}x}{x}$. On a ainsi : $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x(\operatorname{Log} x)^2} = \int_{\operatorname{Log} a}^{\operatorname{Log} b} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{t}\right]_{\operatorname{Log} a}^{\operatorname{Log} b} = \frac{1}{\operatorname{Log} a} - \frac{1}{\operatorname{Log} b}$

2 — Pour calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^4 x\,\mathrm{d}x$, on pose $t = \sin x$, on a alors $\mathrm{d}t = \cos x\,\mathrm{d}x$, d'où : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\sin x\,\mathrm{d}x = \int_0^1 t^4\,\mathrm{d}t = \frac{1}{5}.$

6.5.2. Intégration par parties

Théorème — Soient U et V deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle $[a, b]$. On suppose que les fonctions dérivées U' et V' sont continues sur $[a, b]$. Alors on a la formule d'intégration par parties :

$$\int_a^b U(x)V'(x)\,\mathrm{d}\,x = [U(x)V(x)]_a^b - \int_a^b U'(x)V(x)\,\mathrm{d}\,x.$$

Démonstration — La fonction $(UV)' = U'V + UV'$ est continue sur $[a, b]$ et on a : $\displaystyle\int_a^b (UV)'(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_a^b U'(x)V(x)dx + \int_a^b U(x)V'(x)\,\mathrm{d}\,x$ ce qui entraîne $\displaystyle[U(x)V(x)]_a^b = \int_a^b U'(x)V(x)\,\mathrm{d}\,x + \int_a^b U(x)V'(x)\,\mathrm{d}\,x$.

Exemples :

1) En posant $U(x) = \dfrac{x^2}{2}$ et $V(x) = \operatorname{Log} x$, on a :

$$\int_1^{\mathrm{e}} x \operatorname{Log} x\,\mathrm{d}\,x = \left[\frac{x^2}{2}\operatorname{Log} x\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{x}{2}\,\mathrm{d}\,x = \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{\mathrm{e}}{2} + \frac{1}{2}.$$

2) En posant $U(x) = \operatorname{Arc\,tg} x$ et $V(x) = x$, on a

$$\begin{aligned}\int_0^1 \operatorname{Arctg} x\,\mathrm{d}\,x &= [x \operatorname{Arctg} x]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x\\ &= [x \operatorname{Arctg} x]_0^1 - \frac{1}{2}\left[\operatorname{Log}(1+x^2)\right]_0^1\\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\operatorname{Log} 2.\end{aligned}$$

6.6. Techniques d'intégration

6.6.1. Intégration des fractions rationnelles

Soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes de $\mathbb{R}[x]$ premiers entre eux, où $Q(x)$ est différent du polynôme nul. Dans le cours d'algèbre on montre qu'on peut écrire :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m_k} \frac{A_{k\,i}}{(x-a_k)^i} + \sum_{\epsilon=1}^{s}\sum_{j=1}^{d_\epsilon} \frac{B_{\epsilon\,j}x + C_{\epsilon\,j}}{[(x-b_\epsilon)^2 + c_\epsilon^2]^j}$$

où les $A_{k\,i}, a_k, B_{\epsilon,j}, C_{\epsilon\,j}, b_\epsilon$ sont des réels et les c_ϵ des réels non nuls. Ceci ramène le calcul des primitives des fractions rationnelles $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ à celui des primitives des fractions simples du type $\dfrac{1}{(x-a)^n}$, ($n \in \mathbb{N}^*$) et du type $\dfrac{Ax+B}{[(x-a)^2+b^2]^n}$ où $b \neq 0$, $n \in \mathbb{N}^*$. On a les résultats suivants :

1) $\displaystyle\int \frac{A}{x-a}\,\mathrm{d}\,x = A \operatorname{Log}|x-a| + c.$

2) $\displaystyle\int \frac{A}{(x-a)^n}\,\mathrm{d}\,x = \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + C$, si $n \geq 2$.

3) $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{(x-a)^2+b^2}\,\mathrm{d}\,x = \int \frac{A(x-a)}{(x-a)^2+b^2}\,\mathrm{d}\,x + \int \frac{Aa+B}{(x-a)^2+b^2}\,\mathrm{d}\,x$, si $b \neq 0$.

$$= \frac{1}{2}\operatorname{Log}[(x-a)^2+b^2] + \frac{Aa+B}{b}\operatorname{Arctg}\left(\frac{x-a}{b}\right) + C$$

4) Calcul de $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{[(x-a)^2+b^2]^n}\,\mathrm{d}\,x$, $b \neq 0$, $n \geq 2$

On a :

$$\int \frac{Ax+B}{[(x-a)^2+b^2]^n}\,\mathrm{d}\,x = \int \frac{A(x-a)}{[(x-a)^2+b^2]^n}\,\mathrm{d}\,x + \int \frac{Aa+B}{[(x-a)^2+b^2]^n}\,\mathrm{d}\,x.$$

$$\int \frac{A(x-a)}{[(x-a)^2+b^2]^n}\,\mathrm{d}\,x = \frac{A}{(1-n)\,[(x-a)^2+b^2]^{n-1}} + C;$$

Pour ce qui est de $\displaystyle\int \frac{Aa+B}{[(x-a)^2+b^2]^n}\,\mathrm{d}\,x$, en effectuant le changement de variables $y = \dfrac{x-a}{b}$, elle devient $\dfrac{Aa+B}{b}\displaystyle\int \frac{1}{(y^2+1)^n}\,\mathrm{d}\,y$. Il s'agit donc de chercher les primitives de fractions du type $\dfrac{1}{(x^2+1)^n}$, $n \geq 1$.

Posons $I_n = \displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}\,x$, $n \geq 1$. On peut intégrer par parties en posant $U'(x) = 1$ et $V(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^n}$, on obtient alors

$$\begin{aligned}
I_n &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\int \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}\,x \\
&= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\left(\int \frac{1+x^2}{(1+x^2)^{n+1}} - \int \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}\right) \\
&= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2nI_n - 2nI_{n+1}
\end{aligned}$$

d'où $2nI_{n+1} = (2n-1)I_n + \dfrac{x}{(1+x^2)^n}$.

Sachant que $I_1 = \displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x = \operatorname{Arctg} x + C$, la formule (1) permet de calculer $I_n (n \geq 2)$ par récurrence.

Exemples :

1) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+3x+4}\,\mathrm{d}\,x = \int \frac{\mathrm{d}\,x}{(x+\frac{3}{2})^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{Arctg} \frac{2x+3}{\sqrt{7}} +$
C

2) Calcul de $\displaystyle\int \frac{x^6+x^5+x^4-x^3-x^2+6x-2}{(x-1)^3+(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}\,x$

On a :

$$\frac{x^6+x^5+x^4-x^3-x^2+6x-2}{(x-1)^3+(x^2+1)^2} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-2)^2} + \frac{1}{(x-2)^3} + \frac{1}{x^2+1} + \frac{2x+1}{(x^2+1)^2}$$

et

$$\int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}\,x = \operatorname{Log}|x-1| + C_1$$
$$\int \frac{2}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}\,x = -\frac{2}{x-1} + C_2$$
$$\int \frac{1}{(x-1)^3}\,\mathrm{d}\,x = -\frac{1}{2(x-1)^2} + C_3$$
$$\int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}\,x = \operatorname{Arctg} x + C_4$$
$$\int \frac{2x+1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}\,x = \int \frac{2x}{(x^2+1)^2} + I_2 = -\frac{1}{x^2+1} + I_2$$

or

$$I_2 = \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}I_1 = \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\operatorname{Arctg} x + C_5$$

donc

$$\int \frac{x^6+x^5+x^4-x^3-x^2+6x-2}{(x-1)^3+(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}\,x = \operatorname{Log}|x-1| + \frac{-4x+3}{(x-1)^2} + \frac{x-2}{2(x^2+1)} + \frac{3}{2}\operatorname{Arctg} x + C.$$

6.6.2. Intégrales de la forme $\int$ P(cos x, sin x) dx où P(X,Y)$\in \mathbb{R}$[X,Y]

En considérant $P(\cos x, \sin x)$ comme polynôme en $\sin x$ à coefficients dans $\mathbb{R}[\cos x]$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
P(\cos x . \sin x) &= \sum_{k \geq 0} P_k(\cos x) sin^k x \\
&= \sum_{p \geq 0} P_{2p}(\cos x) sin^{2p} x + \sum P_{2q+1}(\cos x) sin^{2q+1} x \\
&= \sum_{p \geq 0} (1 - cos^2 x)^p P_{2p}(\cos x) \\
&\qquad + \sum_{q \geq 0} (1 - cos^2 x)^q P_{2q+1}(\cos x) \sin x \\
&= Q_0(\cos x) + Q_1(\cos x) \cdot \sin x
\end{aligned}$$

où Q_0 et Q_1 sont des éléments de $\mathbb{R}[x]$. En posant $u = \cos x$, on obtient : $\int Q_1(\cos x) \sin x \, \mathrm{d} x = -\int Q_1(u) \, \mathrm{d} u$ qui est simple à calculer.

Pour ce qui est des primitives de $Q_0(\cos x)$, il suffit de savoir calculer les intégrales de la forme $\int cos^n x \, \mathrm{d} x$ ou $n \in \mathbb{N}$. Pour cela on linéarise $cos^n x$ en posant $\cos x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\imath x} + \mathrm{e}^{-\imath x})$: si $n = 2p$, alors

$$\begin{aligned}
cos^{2p} x &= \frac{1}{2^{2p}} (\mathrm{e}^{\imath x} + \mathrm{e}^{-\imath x})^{2p} \\
&= \frac{1}{2^{2p}} \sum_{k=0}^{2p} \mathrm{C}_{2p}^k \, \mathrm{e}^{(2p-2k)\imath x} \\
&= \frac{1}{2^{2p}} \left[\sum_{k=0}^{p-1} \mathrm{C}_{2p}^k \, \mathrm{e}^{(2p-2k)\imath x} + \mathrm{C}_{2p}^p + \sum_{k=0}^{p-1} \mathrm{C}_{2p}^{2p-k} + \mathrm{e}^{-(2p-2k)\imath x} \right] \\
&= \frac{1}{2^{2p}} \left[\mathrm{C}_{2p}^p + \sum_{k=0}^{p-1} \mathrm{C}_{2p}^k \left(\mathrm{e}^{(2p-2k)\imath x} + \mathrm{e}^{-(2p-2k)\imath x} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2^{2p}} \left[\mathrm{C}_{2p}^p + \sum_{k=0}^{p-1} 2\mathrm{C}_{2p}^k \cos(2p - 2k) x \right]
\end{aligned}$$

En posant $s = p - k$, on obtient :

$$\cos^{2p} x = \frac{1}{2^{2p}} \left[\mathrm{C}_{2p}^p + 2 \sum_{s=1}^{p} \mathrm{C}_{2p}^{p-s} \cos 2sx \right]$$

d'où $\displaystyle\int \cos 2p\,x \; \mathrm{d}\,x = \frac{1}{2^{2p}}\left[\mathrm{C}_{2p}^{p}x + \sum_{s=1}^{p}\mathrm{C}_{2p}^{p-s}\frac{\sin 2sx}{s}\right] + C$

Si $n = 2p+1$, alors

$$\begin{aligned}\cos^{2p+1} x &= \frac{1}{2^{2p+1}}\left[\sum_{k=0}^{p}\mathrm{C}_{2p+1}^{k}\,\mathrm{e}^{(2p+1-2k)\mathrm{i}\,x}\right.\\ &\qquad\left.+\sum_{k=0}^{p}\mathrm{C}_{2p+1}^{2p+1-k}\,\mathrm{e}^{-(2p+1-2k)\mathrm{i}\,x}\right]\\ &= \frac{1}{2^{2p+1}}\left[2\sum_{k=0}^{p}\mathrm{C}_{2p+1}^{k}\cos(2p+1-2k)x\right]\\ &= \frac{1}{2^{2p}}\sum_{\lambda=0}^{p}\mathrm{C}_{2p+1}^{p-\lambda}\cos(2\lambda+1)x\end{aligned}$$

d'où

$$\int \cos^{2p+1} x \; \mathrm{d}\,x = \frac{1}{2^{2p}}\sum_{\lambda=0}^{p}\mathrm{C}_{2p+1}^{p-\lambda}\frac{\sin(2\lambda+1)x}{2\lambda+1}$$

Exemples :

$$\int \sin^3 x \; \mathrm{d}\,x = \int (1-\cos^2 x)\sin x \; \mathrm{d}\,x = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C$$

$$\int \cos^4 x \; \mathrm{d}\,x = \frac{1}{8}\int (\cos 4x + 4cos2x + 3)\; \mathrm{d}\,x = \frac{\sin 4x}{32} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{3}{8}x + C.$$

6.6.3. Intégrales de la forme $\int R(\cos x, \sin x)\; \mathrm{d}\,x$, où R est une fraction rationnelle

En général, on effectue le changement de variables $t = \mathrm{tg}\,\dfrac{x}{2}$, qui n'est valable que sur des intervalles sur lesquels $\mathrm{tg}\,\dfrac{x}{2}$ et $R(\cos x, \sin x)$ sont définies. On a alors

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \mathrm{d}\,x = \frac{2\,\mathrm{d}\,t}{1+t^2}$$

d'où

$$\int R(\cos x, \sin x)\; \mathrm{d}\,x = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}\,t$$

où $R_1(t) = R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}$ est une fonction rationnelle en t.

Exemple : Calcul de $\displaystyle\int \frac{1+\cos x}{1+\sin x}\,\mathrm{d}\,x$

Posons $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, on a alors

$$\begin{aligned}\int \frac{1+\cos x}{1+\sin x}\,\mathrm{d}\,x &= \int \frac{2}{t^2+2t+1}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}\,t\\ &= 2\int\left(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{(1+t)^2}-\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}\,t\end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned}\int \frac{1+\cos x}{1+\sin x}\,\mathrm{d}\,x &= 2\operatorname{Log}|1+t| - \frac{2}{1+t} - \operatorname{Log}(1+t^2) + C\\ &= 2\operatorname{Log}\left|1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| - \frac{2}{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}} - \operatorname{Log}(1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}) + C\\ &= \operatorname{Log}(1+\sin x) - \frac{2}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} + C.\end{aligned}$$

Remarque : Cette méthode conduit souvent à des calculs compliquées. Dans les cas particuliers suivants, on indique des changements de variable plus commodes :

a) $R(\cos x, \sin x)$ est une fonction impaire en x : faire $u = \cos x$;

b) $R(\cos x, \sin x)$ est une fonction paire en x : faire $u = \sin x$;

c) R est une fonction homogène de degré 0 : faire $u = \operatorname{tg} x$, lorsque $\operatorname{tg} x$ et $R(\cos x, \sin x)$ sont définies sur l'intervalle d'intégration.

Exemple : pour calculer $I = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\cos x\,\mathrm{d}\,x}{1+\cos 2x}$, en faisant le changement de variable $u = \sin x$, on obtient :

$$I = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\mathrm{d}\,u}{2(1-u^2)} = \frac{1}{4}\left[\operatorname{Log}\left(\frac{1+u}{1-u}\right)\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \operatorname{Log}\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right).$$

6.6.4. Intégrales abéliennes

6.6.4.1. Intégrale de la forme $\int R\left(x, \sqrt{Q(x)}\right)\mathrm{d}\,x$, où R est une fraction rationnelle et Q un polynôme de degré ≤ 2

a) Si $Q(x) = ax+b$ est un polynôme de degré 1, en faisant le changement de variable $t = \sqrt{ax+b}$, on se ramène à l'intégrale d'une fraction rationnelle.

b) Si $Q(x) = ax^2+2bx+c$ est un polynôme de degré 2, on distinguera deux cas :

• $a < 0$: $Q(x) = a(x+\frac{b}{a})^2 + c - \frac{b}{a^2}$ sera ≥ 0 si et seulement si

$$b^2 - ac > 0 \qquad \text{et} \qquad \left|x+\frac{b}{a}\right| \leq \sqrt{\frac{b^2-ac}{a^2}}.$$

En faisant le changement de variable $x + \frac{b}{a} = \sqrt{\frac{b^2-ac}{a^2}}\cos t$, on obtient : $\sqrt{Q(x)} = u(t) = \sqrt{\frac{ac-b^2}{a}}\sin t$ et on est ramené à une intégrale du type $\int R(\cos t, \sin t)\,\mathrm{d}t$.

• $a > 0$: en divisant au besoin $Q(x)$ par a, on peut supposer que $Q(x) = x^2+2bx+c$. En faisant le changement de variable $t = \sqrt{x^2+2bx+c} - x$, on obtient $\sqrt{Q(x)} = \frac{2bt-c-t^2}{2(b-t)}$, et on est ramené à l'intégrale d'une fraction rationnelle.

Remarque :

— Si $Q(x)$ à deux racines réelles a et b, on peut faire le changement de variable $t = \sqrt{\frac{x-b}{x-a}}$.

— Si $Q(x) = x^2-1$ (resp. $Q(x) = x^2+1$), on peut faire le changement de variable $x = \mathrm{ch}\, t$ (resp. $x = sh\, t$).

6.6.4.2. Intégrale de la forme $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x$

En général, on fait le changement de variable $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ qui permet de se ramener à l'intégrale de fractions rationnelles.

6.7. Exercices et problèmes

1) Calculer les primitives suivantes :

a) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-x+1}$

b) $\int \frac{3x\,\mathrm{d}x}{4x^2+3x+1}$, $\quad \int \frac{x^3}{x^4+2}\,\mathrm{d}x$

c) $\int \frac{x^5\,\mathrm{d}x}{(x^2+1)^3}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}\,x}{x^2(x^2-1)^2(x^2+1)^4 - x}$, $\displaystyle\int x \,\mathrm{d}\,x$

2) Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x \,\mathrm{d}\,x}{3+2\cos x},\quad \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}\,x,\quad \int_0^{\pi} \frac{\cos^3 x}{1-2\sin x}\,\mathrm{d}\,x,$$

$$\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}\,x}{a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x},\ (a\neq 0, b \neq 0),$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\,x}{\sin^4 x + \cos^4 x},\quad \int_0^{\pi} \cos^7 x \,\mathrm{d}\,x,\quad \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\,x}{3+\sin x},$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\,x}{\sin x + \cos x},\quad \int_0^{\pi/4} \sin^3 x \cos^2 x \,\mathrm{d}\,x.$$

3) Calculer les primitives suivantes :

$$\int \frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{1+x^2}},\quad \int \frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{3x^2+4x+2}},\quad \int \frac{4x\,\mathrm{d}\,x}{\sqrt{x^2-3x+1}},$$

$$\int \frac{x^2-5}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}\,x,\quad \int \frac{\mathrm{d}\,x}{(x+2)+\sqrt{x-1}},\quad \int \frac{\mathrm{d}\,x}{x+\sqrt{4x^2+3x+1}},$$

$$\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,\mathrm{d}\,x,\quad \int \frac{\mathrm{d}\,x}{(1+x^2)+\sqrt{1+x^2}},\quad \int \frac{\mathrm{d}\,x}{(a^2+x^2)x^2},$$

$$\int \sqrt{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{x}+1}\,\mathrm{d}\,x,\quad \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{\mathrm{d}\,x}{x^2},\quad \int \frac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{x\sqrt{1+x+x^2}}\,\mathrm{d}\,x,$$

$$\int \frac{\mathrm{d}\,x}{x\sqrt{x^2+4x-4}},\quad \int \sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}\,x.$$

4) Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^4 \frac{\operatorname{Log}(x+2)}{x+1}\,\mathrm{d}\,x,\quad \int_1^2 x^5 \operatorname{Log} x \,\mathrm{d}\,x,\quad \int_2^3 \frac{(\operatorname{Log} x)^3}{x^2}\,\mathrm{d}\,x,$$

$$\int_{1/2}^1 \frac{\operatorname{Log} x}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}\,x,\quad \int_0^{\pi/4} \operatorname{Log}(1+\operatorname{tg} x)\,\mathrm{d}\,x,\quad \int_0^5 x^3 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}\,x,$$

$$\int_1^3 x^5 (\operatorname{Log} x)^2 \,\mathrm{d}\,x$$

5) Calculer les primitives suivantes :

$$\int \frac{x \operatorname{Arcsin} x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}\,x,\quad \int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}+1}{\cos^2 x},\quad \int \frac{x - \operatorname{Arctg} x}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x.$$

6) Soit $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction réglée. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}\,t.$$

7) Soit f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction réglée. On pose

$$r(n) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

a) Montrer que si f est croissante, on a :

$$0 \leq r(n) \leq \frac{b-a}{n}\left(f(b) - f(a)\right).$$

b) Montrer que si f est de classe C^1, alors

$$\lim_{n \to +\infty} nr(n) = \frac{b-a}{n}\left(f(b) - f(a)\right).$$

Indication : en posant $x_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$, remarquer qu'on a

$$r(n) = \sum_{k=0}^{n} \int_{x_k}^{x^{k+1}} \left(f(x_{k+1}) - f(t)\right) \mathrm{d}t.$$

8) Soit f : $[a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et telle que $f(a) = f(b) = 0$. On note $M = \sup\limits_{x \in [a\ b]} |f'(x)|$. Montrer que

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq M\frac{(b-a)^2}{4}.$$

9) Soit f : $[0, a] \to \mathbb{R}$ une fonction continue strictement croissante et telle que $f(0) = 0$; soit g: $[0, f(a)] \to \mathbb{R}$ sa fonction réciproque.

a) Montrer que, pour $0 \leq x \leq a$ et $0 \leq y \leq f(a)$, on a : $xy \leq \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^y g(u)\,\mathrm{d}u$, l'inégalité ayant lieu si $y = f(x)$.

Indication : y étant fixé, étudier les variations de la fonction $x \to xy - \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

b) En déduire, p et q étant des entiers positifs tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, que : $xy \leq ax^p + by^q$, pour $a > 0, b > 0$ et $(pa)^q(qb)^p \geq 1$.

10) Montrer que la fonction définie par $f(0) = 0$, et $f(x) = x^2 \sin\dfrac{1}{x}$ si $0 < x \leq 1$ est dérivable sur $[0, 1]$: sa dérivée f' est-elle intégrable sur $[0, 1]$?

11) Soit f : $[a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. On suppose que pour toute fonction continue h : $[a, b] \to \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^b f(x)h(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Montrer que f est identiquement nulle sur $[a, b]$.

12) Soit f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction réglée. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\, e^{int}\, dt = 0.$$

Indication : On démontrera le résultat d'abord lorsque f est une fonction constante, puis lorsque f est une fonction en escalier, avant de le généraliser aux fonctions réglées.

13) En utilisant des inégalités ou la formule de la moyenne, calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} \int_x^{x+\sqrt{x}} \frac{\operatorname{Arctg} t}{\sqrt{t}}\, dt, \quad \lim_{x\to 0} \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t^2}\, dt, \quad \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 (x^2+\sin x)^n\, dx.$$

14) (Inégalités de Schwartz et de Minkowski) Soient f et g deux fonctions numériques définies et continues sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Montrer que :

$$1)\ \left(\int_a^b f(x)g(x)\, dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b (f(x))^2\, dx\right)\left(\int_a^b (g(x))^2\, dx\right).$$

$$2)\ \left(\int_a^b (f(x)+g(x))^2\, dx\right)^{1/2} \leq \left(\int_a^b (f(x))^2\, dx\right)^{1/2} + \left(\int_a^b (g(x))^2\, dx\right)^{1/2}.$$

15) Soit $f\ : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n et soit $u(x) = \dfrac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!}$.

Montrer que : $\forall t \in [a, b]$,

$$\int_a^t u(x) f^{(n)}(x)\, dx = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left[u^{(k)}(x) f^{(n-k-1)}(x)\right]_a^t ;$$

en déduire la formule de Taylor avec reste intégral :

$$f(t) = f(a) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^k}{k} f^{(k)}(a) + \int_a^t (t-x)^{\frac{n-1}{(n-1)!}} f^{(n)}(x)\, dx.$$

Problème I — L'objet de ce problème est de démontrer le résultat suivant (formule de Stirling) : pour tout entier positif n assez grand : $n! \approx n^n \sqrt{2\pi n}\, e^{-n}$.

1) Soient :

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \operatorname{Log} \frac{1+x}{1-x} - x$$

$$\Psi(x) = \varphi(x) - \frac{x^3}{3(1-x^2)}$$

En étudiant les dérivées de ces deux fonctions. montrer que : $\varphi(x) > 0$ et $\Psi(x) < 0$ pour $0 < x < 1$.

2) Montrer que pour tout $0 \leq x < 1$ on a :

$$0 \leq \frac{1}{2} \operatorname{Log} \frac{1+x}{1-x} - x \leq \frac{x^3}{3(1-x^2)}.$$

En posant $x = \dfrac{1}{2n+1}$. en conclure que :

$$0 \leq (n+\frac{1}{2}) \operatorname{Log} \frac{n+1}{n} - 1 \leq \frac{1}{12} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

3) Soient les deux suites de terme général :

$a_n = n^{\frac{n+\frac{1}{2}\, e^n}{n!}}$ et $b_n = a_n \, e^{\frac{1}{12n}}$.

Montrer que $a_n \leq b_n$ et que $\dfrac{a_n+1}{a_n} \geq 1$ et $\dfrac{b_n+1}{b_n} \leq 1$.

En déduire qu'il existe un nombre unique c tel que : $a_n \leq c \leq b_n$ et qu'il existe un nombre θ compris entre 0 et 1 tel que :

$$n! = c^{-1} n^{n+\frac{1}{2}} \, e^{-n} \, e^{\frac{\theta}{12n}} .$$

4) Montrer la formule de récurrence suivante :

$$\int \sin^n x \, \mathrm{d}\, x = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \; \mathrm{d}\, x.$$

En déduire que :

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x \; \mathrm{d}\, x = \frac{2n-1}{2n} \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{1}{2} \frac{\pi}{2}.$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} \; \mathrm{d}\, x = \frac{2n}{2n+1} \frac{2n-2}{2n-1} \cdots \frac{2}{3}.$$

En conclure que :

$$1 \leq \frac{\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} \; \mathrm{d}\, x}{\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} \; \mathrm{d}\, x} \leq 1 + \frac{1}{2n}$$

et :

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &= \lim_{n \to +\infty} \frac{2}{1} \frac{2}{3} \frac{4}{3} \frac{4}{5} \frac{6}{5} \frac{6}{7} \cdots \frac{2n}{2n-1} \frac{2n}{2n+1} \\ &= \lim_{n \to +\infty} \frac{2^2}{3^2} \frac{4^2}{5^2} \cdots \frac{(2n-2)^2}{(2n-1)^2} 2n \end{aligned}$$

et par suite :

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!\, n^{\frac{1}{2}}}.$$

5) Montrer que le nombre c défini en 3) vérifie :

$$\begin{aligned} c &= \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}}{(2n)!} \mathrm{e}^{-2n} \\ c &= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n!)^2 2^{2n}\sqrt{2}}{(2n)!\, n^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{n^{n+\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{n}}{n!}\right]^2 \\ &= \sqrt{2\pi} c^2 \end{aligned}$$

d'où la valeur de c et la formule de Stirling.

Problème II — Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui vérifie la propriété : il existe $k > 0$ tel que

$$\forall (x, y), (x', y') \in \Omega, \qquad |f(x, y) - f(x', y')| \leq k|y' - y|.$$

Soit $(a, b) \in \Omega$ et $I = \{(x, y) : |x - a| \leq \alpha, |y - b| < \beta\} \subset \Omega$. Soit M tel que $|f(x, y)| \leq M$, $\forall (x, y) \in I$. On suppose $M\alpha \leq \beta$.

1)

a — Soit $I = [a - \alpha, a + \alpha]$. Montrer qu'on définit bien une suite de fonctions sur J en posant : $\varphi_0(x) = b$, $\varphi_n(x) = b + \int_a^x f(t, \varphi_{n-1}(t))\, \mathrm{d}t$, $\forall x \in J$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. (On montrera que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in J$, $|\varphi_n(x) - b| < \beta$).

b — Montrer que : $|\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)| \leq \dfrac{Mk^{n-1}}{(n-1)!}|x - a|^{n-1}$, $\forall x \in J$.

2)

a — Montrer que φ_n est continue, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

b — Montrer que la suite (φ_n) converge uniformément vers une fonction que l'on notera φ.

c — Montrer que φ est continue et vérifie les relations : $\varphi(a) = b$ et $\varphi(x) = b + \int_a^x f(t, \varphi(t))\, \mathrm{d}t$, $\quad \forall x \in J$.

d — En déduire que φ est dérivable sur J et vérifie l'égalité : $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$, $\quad \forall x \in J$.

3)

a — Soit $\Psi : J \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable qui vérifie les relations : $\Psi(a) = b$ et $\Psi'(x) = f(x, \Psi(x))$, $\quad \forall x \in J$.

Montrer que : $\Psi(x) = b + \int_a^x f(t, \Psi(t))\, \mathrm{d}t$, $\quad \forall x \in J$.

b — Montrer que :

$$\begin{aligned}|\varphi(x) - \Psi(x)| &\leq k \int_a^x |\varphi(t) - \Psi(t)| \, \mathrm{d}\,t. \qquad \forall x \in J \\ &\leq A \frac{k^n}{n!} |x - a|^n. \qquad \text{où} \quad A = \sup_{x \in J} |\varphi(x) - \Psi(x)|.\end{aligned}$$

c — En déduire que $\varphi = \Psi$.