Chapitre 7 : FONCTIONS VECTORIELLES

7.1. Rappels

7.1.1. Produit mixte, produit vectoriel

On suppose que $\mathbb{R}^3$ est muni d'un produit scalaire et d'une orientation. On peut alors trouver des bases orthonormés directes de $\mathbb{R}^3$ (voir Cours d'Algèbre).

DÉFINITION

1) Soit $\overrightarrow{V}_1$, $\overrightarrow{V}_2$ et $\overrightarrow{V}_3$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On appelle produit mixte de ces trois vecteurs et on note $(\overrightarrow{V}_1, \overrightarrow{V}_2, \overrightarrow{V}_3)$ le déterminant dans une même base orthonormée de ces trois vecteurs :

$$\boxed{\begin{array}{l}(\overrightarrow{V}_1, \overrightarrow{V}_2, \overrightarrow{V}_3) = \text{Dét}_{(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})}(\overrightarrow{V}_1, \overrightarrow{V}_2, \overrightarrow{V}_3)\\ (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}) \text{ base orthonormée directe}\end{array}}$$

2) Si $\overrightarrow{V}_\alpha = x_\alpha\vec{\imath} + y_\alpha\vec{\jmath} + z_\alpha\vec{k}$, pour $\alpha = 1, 2, 3$,

alors

$$(\overrightarrow{V}_1, \overrightarrow{V}_2, \overrightarrow{V}_3) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

d'où

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{V}_1, \overrightarrow{V}_2, \overrightarrow{V}_3) &= x_1 \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} + y_1 \begin{vmatrix} z_2 & z_3 \\ x_2 & x_3 \end{vmatrix} + z_1 \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \\ &= \overrightarrow{V}_1 \cdot \overrightarrow{W} \text{ (produit scalaire)}\end{aligned}$$

où

$$\overrightarrow{W} = \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} \vec{\imath} + \begin{vmatrix} z_2 & z_3 \\ x_2 & x_3 \end{vmatrix} \vec{\jmath} + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \vec{k}$$

On établit facilement que $\overrightarrow{W}$ est indépendant du choix de la base orthonormée directe $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. $\overrightarrow{W}$ ne dépend donc que de $\overrightarrow{V}_1$, $\overrightarrow{V}_2$, $\overrightarrow{V}_3$, du produit scalaire, et de l'orientation.

DÉFINITION

Étant donnés deux vecteurs $\overrightarrow{V}_2$ et $\overrightarrow{V}_3$, on appelle produit vectoriel de $\overrightarrow{V}_2$ et $\overrightarrow{V}_3$, et on note $\overrightarrow{V}_2 \wedge \overrightarrow{V}_3$, le vecteur tel que :

$$\forall \overrightarrow{V}_1 \in \mathbb{R}^3, \quad \overrightarrow{V}_1 \cdot \left(\overrightarrow{V}_2 \wedge \overrightarrow{V}_3\right) = \left(\overrightarrow{V}_1, \overrightarrow{V}_2, \overrightarrow{V}_3\right)$$

7.1.2. Remarques

i) Dans toute base orthonormée directe, les composantes de $\overrightarrow{V}_2 \wedge \overrightarrow{V}_3$ sont données en fonction de celles de $\overrightarrow{V}_2(x_2, y_2, z_2)$ et de $\overrightarrow{V}_3(x_3, y_3, z_3)$ par :

$$\overrightarrow{V}_2 \wedge \overrightarrow{V}_3 = (y_2 z_3 - z_2 y_3, z_2 x_3 - x_2 z_3, x_2 y_3 - y_2 x_3)$$

ii) $\overrightarrow{V}_2 \wedge \overrightarrow{V}_3$ est orthogonal à $\overrightarrow{V}_2$ et $\overrightarrow{V}_3$.

iii) $\left(\overrightarrow{V}_2, \overrightarrow{V}_3, \overrightarrow{V}_2 \wedge \overrightarrow{V}_3\right)$ est une base directe si $\overrightarrow{V}_2$ et $\overrightarrow{V}_3$ ne sont pas colinéaires.

iv) Le produit vectoriel définit une application de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, bilinéaire et antisymétrique.

Dans la suite $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Si un élément $\overrightarrow{V}$ de $\mathbb{R}^n$ s'écrit $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \vec{e}_i$, on le notera $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n)$.

Dans ce chapitre le symbole $\|\ \|$ désigne la norme $\|\vec{x}\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$, $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$.

7.2. Définition - Exemples

7.2.1. Définition

On appelle *fonction vectorielle* toute application

$$\vec{f} : S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$
$$t \mapsto \overrightarrow{f(t)} = (f_1(t), \ldots, f_n(t))$$

où S est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

Remarque : Si

$$\vec{f} : S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$
$$t \mapsto \overrightarrow{f(t)} = (f_1(t), \dots, f_n(t))$$

est une fonction vectorielle, elle définit n fonctions numériques $f_1, \dots, f_n$: de S dans $\mathbb{R}$. Ces fonctions, appelées fonctions composantes, déterminent complètement $\vec{f}$.

7.2.2. Exemples

$f : [0, 1] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (a \cos t, b \sin t)$.

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (e^t, e^{-t})$.

$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto (\cos t, \sin t, t)$.

7.3. Limite, continuité et dérivabilité d'une fonction vectorielle

7.3.1. Limite

7.3.1.1. Définition

Soit $\vec{f} : S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $\vec{l} \in \mathbb{R}^n$ et $t_0 \sim S$. On dira que $\vec{f}$ admet comme limite $\vec{l}$ quand t tend vers t_0 en restant dans S, et on note $\lim\limits_{t \to t_0} \overrightarrow{f(t)} = \vec{l}$, si et seulement si :

$$\lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \in S}} |f_i(t) - l_i| = 0, \qquad \forall i = 1, \dots, n$$

7.3.1.2. Remarques

1) La définition 7.3.1.1 ramène la définition de la limite d'une fonction vectorielle à celle de fonctions numériques.

2) Si on note $\| \ \|$ l'une des normes N_1, N_2, N_∞ définies sur $\mathbb{R}^n$ au 5.1.3.2, on a :

$$\lim_{t \to t_0} \overrightarrow{f(t)} = \vec{l} \Leftrightarrow \quad \lim_{t \to t_0} \left\| \overrightarrow{f(t)} - \vec{l} \right\| = 0$$

On rappelle que deux normes N et N' sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes s'il existe deux nombres a, b ($a > 0$ et $b > 0$) tels que

$$aN'(x) \leq N(x) \leq bN'(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \tag{1}$$

La relation (1) entraîne alors:

$$\lim_{t\to t_0} N\left(\overrightarrow{f(t)} - \vec{l}\right) = 0 \Leftrightarrow \lim_{t\to t_0} N'\left(\vec{f}(t) - \vec{l}\right) = 0$$

4) Soit $(\overrightarrow{e'_1}, \overrightarrow{e'_2}, \dots, \overrightarrow{e'_n})$ une base canonique de $\mathbb{R}^n$. L'application

$$N'_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$$

$$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \to N'_2(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} |x'_i|$$

où les x'_i sont les composantes de $\vec{x}$ dans la base $(\vec{e'_i})$, définit une norme de $\mathbb{R}^n$, équivalentes à N_2 $(N_2(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|)$ d'après les relations

$$\vec{e_i} = \sum_{j=1}^{n} A_{ji} \overrightarrow{e'_j}; \qquad x'_j = \sum_{j=1}^{n} A_{ji} x_i$$

(A_{ji}) étant la matrice inversible, de changement de base. Donc, d'après 3) : $\lim_{t\to t_0} N_2\left(\vec{f}(t) - \vec{l}\right) = 0 \Leftrightarrow \lim_{t\to t_0} N'_2\left(\vec{f}(t) - \vec{l}\right) = 0$ ou encore :

$\lim_{t\to t_0} \vec{f}(t) = \vec{l} \Leftrightarrow \lim_{t\to t_0} \tilde{f}_i(t) = \tilde{l}_i \qquad \forall i = 1, \dots, n$

les $\tilde{f}_i(t)$ et $\tilde{l}_i$ étant les composantes de $\vec{f}_i(t)$ et $\vec{l}$ dans la base $(\overrightarrow{e'_1}, \dots, \overrightarrow{e'_n})$.

D'où

7.3.1.3. Proposition

$$\lim_{t\to t_0} \vec{f}(t) = \vec{l} \Leftrightarrow \lim_{t\to t_0} \tilde{f}_i(t) = \tilde{l}_i, \ \forall i = 1, \dots, n$$

où les $\tilde{f}_i(t)$ et $\tilde{l}_i$ sont les composantes de $\vec{f}(t)$ et $\vec{l}$ dans une base $(\overrightarrow{e'_1}, \dots, \overrightarrow{e'_n})$ de $\mathbb{R}^n$.

7.3.1.4. Propriétés

Soient : $\vec{f} : I \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto \overrightarrow{f(t)}$ et $\vec{g} : I \mapsto \mathbb{R}^n$, $t \mapsto \overrightarrow{g(t)}$ deux applications définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $t_0 \sim I$.

Si $\lim_{t\to t_0} \overrightarrow{f(t)} = \vec{l}$ et $\lim_{t\to t_0} \overrightarrow{g(t)} = \vec{m}$, alors :

i) $\forall \lambda, \rho \in \mathbb{R}$, $\lim_{t\to t_0} \lambda\overrightarrow{f(t)} + \rho\overrightarrow{g(t)} = \lambda\vec{l} + \rho\vec{m}$;

ii) $\lim_{t\to t_0} ||\overrightarrow{f(t)}|| = ||\vec{l}||$;

iii) Si $\mathbb{R}^n$ est muni d'un produit scalaire, on a $\lim_{t\to t_0} \overrightarrow{f(t)} \cdot \overrightarrow{g(t)} = \vec{l} \cdot \vec{m}$;

iv) Si $\mathbb{E}^3$ est orienté et muni d'un produit scalaire, on a $\lim\limits_{t \to t_0} \overrightarrow{f(t)} \wedge \overrightarrow{g(t)} = \vec{l} \wedge \vec{m}$.

Démonstration — On démontre aisément i) en utilisant les propriétés des limites des fonctions numériques et la proposition 7.3.1.3.

ii) Si $\lim\limits_{t \to t_0} \overrightarrow{f(t)} = \vec{l}$, alors $\lim\limits_{t \to t_0} ||\overrightarrow{f(t)}|| = ||\vec{l}||$

car $0 \leq \; \left| ||\overrightarrow{f(t)}|| - ||\vec{l}|| \right| \leq ||\overrightarrow{f(t)} - \vec{l}||$.

iii) Soit $W = (\overrightarrow{W_1}, \dots, \overrightarrow{W_n})$ une base orthonormée de $\mathbb{E}^n$ par rapport au produit sacalaire et soient $(f_i(t))_{1 \leq i \leq n}$, $(g_i(t))_{1 \leq i \leq n}$, $(l_i)_{1 \leq i \leq n}$, $(m_i)_{i \leq l \leq n}$, les composantes respectives de $\vec{f}$, $\vec{g}$, $\vec{l}$ et $\vec{m}$ dans cette base. D'après 7.3.1.3,

$$\lim_{t \to t_0} \overrightarrow{f(t)} = \vec{l} \Leftrightarrow \lim_{t \to t_0} f_i(t) = l_i$$

$$\lim_{t \to t_0} \overrightarrow{g(t)} = \vec{m} \Leftrightarrow \lim_{t \to t_0} g_i(t) = m_i$$

$$\text{Donc} \qquad \lim_{t \to t_0} \overrightarrow{f(t)} \cdot \overrightarrow{g(t)} = \lim_{t \to t_0} \sum_{i=1}^{n} f_i(t) g_i(t)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lim_{t \to t_0} f_i(t) g_i(t)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} l_i m_i = \vec{l} \cdot \vec{m}$$

Pour démontrer iv, il suffit d'expliciter $\overrightarrow{f(t)} \wedge \overrightarrow{g(t)}$ et $\vec{l} \wedge \vec{m}$ dans une base orthonormée directe.

7.3.2. Continuité

7.3.2.1. Définition

Soit : $\vec{f} : S \subset \mathbb{E} \to \mathbb{E}^m$ et $t_0 \in S$. On dira que $\vec{f}$ est continue en t_0, si et seulement si : $\lim\limits_{t \to t_0} \overrightarrow{f(t)} = \overrightarrow{f(t_0)}$

7.3.2.2. Proposition

Soit : $\vec{f} : S \subset \mathbb{E} \to \mathbb{E}^n$, $t \mapsto (f_1(t), \dots, f_n(t))$. Soit $t_0 \in S$. f est continue en t_0 si et seulement si chacune des fonctions f_i, $i = 1, \dots, n$, est continue en t_0.

Démonstration — Elle découle immédiatement de la proposition 7.3.1.3.

De 7.3.2.4 on déduit :

7.3.2.3. Proposition

Soient : $\vec{f} : S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $\vec{g} : S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ deux applications et $t_0 \in S$. Si $\vec{f}$ et $\vec{g}$ sont continues en t_0 alors $\lambda\vec{f} + \mu\vec{g}(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$, $\|\vec{f}\|$, $\vec{f} \cdot \vec{g}$ sont continues en t_0. Si $n = 3$, $\vec{f} \wedge \vec{g}$ est aussi continue en t_0.

7.3.3. Dérivabilité

7.3.3.1. Définition

$\vec{f} : I \to \mathbb{R}^n$, soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, une application $\mathbb{R}$ et $t_0 \in \overset{\circ}{I}$. Soit la fonction :

$$\vec{\varphi} : I - \{t_0\} \to \mathbb{R}^n$$
$$t \to \frac{\overrightarrow{f(t)} - \overrightarrow{f(t_0)}}{t - t_0}$$

Si $\overrightarrow{\varphi(t)}$ admet une limite $\vec{A}$, quand t tend vers t_0, on dira que $\vec{f}$ est dérivable en t_0, de dérivée $\vec{A}$, notée

$$\vec{A} = \overrightarrow{f'(t_0)}$$

7.3.3.2. Remarques

1) Comme pour les fonctions numériques on déduit aisément de la définition que $\vec{f}$ est dérivable en t_0, si et seulement si :

$$\boxed{\exists \vec{A} \in \mathbb{R}^n, \text{ tel que } \overrightarrow{f(t)} = \overrightarrow{f(t_0)} + (t - t_0)\vec{A} + (t - t_0)\vec{\varepsilon}(t, t_0)}$$

avec $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{\varepsilon}(t, t_0) = \vec{0}$, $\vec{A}$ est alors la dérivée de $\vec{f}$ en t_0.

2) Soit $\vec{f} : I \to \mathbb{R}^n$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et soit $t_0 \in \overset{\circ}{I}$. $\vec{f}$ est dérivable en t_0 si et seulement si ses composantes $\tilde{f}_k$ dans une base quelconque $(\vec{e'_1}, \vec{e'_2}, \ldots, \vec{e'_n})$ sont dérivables en t_0, et on a alors

$$\boxed{\vec{f'}(t_0) = \sum_{k=1}^{n} \tilde{f}'_k(t_0)\vec{e'}_k.}$$

Preuve — Il suffit de le vérifier dans la base canonique. La fonction

$$\overrightarrow{\varphi(t)} = \left(\frac{f_1(t) - f(t_0)}{t - t_0}, \ldots, \frac{f_n(t) - f_n(t_0)}{t - t_0}\right)$$

admet une limite $\vec{f'}(t_0) = (l_1, \ldots, l_n)$ quand t tend vers t_0 si, et seulement si :

$$\lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \neq t_0}} \frac{f_k(t) - f_k(t_0)}{t - t_0} = l_k, \ \forall k = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

(2) signifie que, $\forall k = 1, \dots, n$, f_k est dérivable en t_0 et qu'on a $\overrightarrow{f'}(t_0) = (f_1'(t_0), \dots, f_n'(t_0)) = (l_1, \dots, l_n)$.

7.3.3.3. Propriétés

1) Si $\overrightarrow{f}$ et $\overrightarrow{g}$ sont dérivables en t_0 alors $\lambda\overrightarrow{f} + \mu\overrightarrow{g}$ est dérivable en t_0 et on a :

$$\left(\lambda\overrightarrow{f} + \mu\overrightarrow{g}\right)'(t_0) = \lambda\overrightarrow{f'}(t_0) + \mu\overrightarrow{g'}(t_0)$$

2) Si $\mathbb{R}^n$ est muni d'un produit scalaire, $\overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{g} : t \mapsto \overrightarrow{f}(t) \cdot \overrightarrow{g}(t)$ et $\overrightarrow{f} \wedge \overrightarrow{g} : t \mapsto \overrightarrow{f}(t) \wedge \overrightarrow{g}(t)$ $(n = 3)$ sont dérivables en t_0 et on a :

$$\boxed{\begin{array}{l}(\overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{g})'(t_0) = \overrightarrow{f'}(t_0) \cdot \overrightarrow{g}(t_0) + \overrightarrow{f}(t_0) \cdot \overrightarrow{g'}(t_0) \\ (\overrightarrow{f} \wedge \overrightarrow{g})'(t_0) = \overrightarrow{f'}(t_0) \wedge \overrightarrow{g}(t_0) + \overrightarrow{f}(t_0) \wedge \overrightarrow{g'}(t_0)\end{array}}$$

ces propriétés sont aisément vérifiables dans une base orthonormée.

3) Si $\mathbb{R}^3$ est un espace euclidien orienté soient $\overrightarrow{f}, \overrightarrow{g}, \overrightarrow{h} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dérivables. Soit $(\overrightarrow{f}, \overrightarrow{g}, \overrightarrow{h}) : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \det(\overrightarrow{f}(t), \overrightarrow{g}(t), \overrightarrow{h}(t))$. D'après le 1-5,

$$\det\left(\overrightarrow{f}(t), \overrightarrow{g}(t), \overrightarrow{h}(t)\right) = \overrightarrow{f}(t) \cdot \left(\overrightarrow{g}(t) \wedge \overrightarrow{h}(t)\right)$$

donc $(\overrightarrow{f}, \overrightarrow{g}, \overrightarrow{h})$ (produit mixte de $\overrightarrow{f}$, $\overrightarrow{g}$ et $\overrightarrow{h}$) est dérivable et on a :

$$\boxed{\begin{array}{l}(\overrightarrow{f}, \overrightarrow{g}, \overrightarrow{h})'(t) = (\overrightarrow{f'}(t), \overrightarrow{g}(t), \overrightarrow{h}(t)) \\ \qquad +(\overrightarrow{f}(t), \overrightarrow{g'}(t), \overrightarrow{h}(t)) + (\overrightarrow{f}(t), \overrightarrow{g}(t), \overrightarrow{h'}(t))\end{array}}$$

4) Les théorèmes de Rolle et des accroissements finis, valables pour les fonctions numériques, ne s'appliquent pas en général pour les fonctions vectorielles. En effet soit :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{f} : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (t^2(1-t), t(1-t))\end{aligned}$$

On a $\overrightarrow{f}(0) = \overrightarrow{f}(1) = \overrightarrow{0}$; $\overrightarrow{f}$ est dérivable sur $]0, 1[$ et pourtant il n'existe pas de $t_0 \in]0, 1[$, tel que $\overrightarrow{f'}(t_0) = \overrightarrow{0}$. En effet :

$$\overrightarrow{f'}(t) = (t(2-3t), (1-2t)).$$

7.4. Dérivées d'ordre supérieur Développements limités

7.4.1. Dérivées d'ordre supérieur

Soit $\overrightarrow{f} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, et soit $t_0 \in \overset{\circ}{I}$. Si $\overrightarrow{f}$ est dérivable dans un voisinage $V(t_0)$ de t_0, considérons la fonction

$$\begin{aligned} \overrightarrow{f'} : V(t_0) &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto \overrightarrow{f'}(t) \end{aligned}$$

Si $\overrightarrow{f'}$ est dérivable en t_0, sa dérivée notée $\overrightarrow{f''}(t_0)$, s'appelle dérivée d'ordre 2 de f en t_0. De proche en proche on peut définir $\overrightarrow{f^{(p)}}(t_0)$. L'existence de $\overrightarrow{f^{(p)}}(t_0)$ suppose que $\overrightarrow{f'}(t)$, $\overrightarrow{f''}(t), \ldots, \overrightarrow{f^{(p-1)}}(t)$ sont définies dans un voisinage de t_0.

On montre facilement que $\overrightarrow{f^{(p)}}(t_0)$ existe si et seulement si les composantes $\tilde{f}_k$ de $\overrightarrow{f}$ dans une base $(\overrightarrow{e'_1}, \overrightarrow{e'_2}, \ldots, \overrightarrow{e'_n})$ de $\mathbb{R}^n$ admettent des dérivées d'ordre p en t_0 et on a alors :

$$\overrightarrow{f^{(p)}}(t_0) = \sum_{k=1}^{n} \tilde{f}_k^{(p)}(t_0)\overrightarrow{e'_k}.$$

Une fonction $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ est dite de classe C^k sur l'intervalle I si $\overrightarrow{f^{(k)}}$ est définie et continue sur I. Ce qui entraîne que $f, f', \ldots, f^{(k-1)}$ sont définies et continues sur I.

7.4.2. Développements limités

Supposons que les composantes $\tilde{f}_k$ de $\overrightarrow{f}$ dans une base $(\overrightarrow{e'_1}, \overrightarrow{e'_2}, \ldots, \overrightarrow{e'_n})$ admettent des développements limités à l'ordre p au voisinage de t_0. On peut écrire dans ce cas :

$$\tilde{f}_k(t_0 + h) = \tilde{p}_k(h) + h^p \varepsilon_k(h)$$

où $p_k(h)$ est un polynôme en h de degré $\leq p$ et $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon_k(h) = 0$. Par suite on a :

$$\overrightarrow{f}(t_0 + h) = \overrightarrow{p}(h) + h^p \overrightarrow{\varepsilon}(h) \tag{1}$$

où $\overrightarrow{p}(h) = \sum\limits_{k=1}^{n} \tilde{p}_k(h)\overrightarrow{e'_k}$ est un polynôme en h à coefficients dans $\mathbb{R}^n$ de degré $\leq p$, et $\vec{\varepsilon}(h) = \sum\limits_{k=1}^{n} \varepsilon_k(h)\overrightarrow{e'_k}$ vérifie $\lim\limits_{h \to 0} \vec{\varepsilon}(h) = \overrightarrow{0}$.

La formule (1) constitue un développement limité de $\overrightarrow{f}$ à l'ordre p au voisinage de t_0. Si les développements limités des f_k sont obtenus à partir de la formule de Taylor, on a :

$$\boxed{\begin{aligned}\overrightarrow{f}(t_0+h) = \overrightarrow{f}(t_0) + h\overrightarrow{f'}(t_0) + \frac{h^2}{2!}\overrightarrow{f''}(t_0) + \cdots \\ + \frac{h^p}{p!}\overrightarrow{f}^{(p)}(t_0) + h^p\vec{\varepsilon}(h) \\ \text{avec } \lim_{h\to 0}\vec{\varepsilon}(h) = \overrightarrow{0}\end{aligned}}$$

7.4.3. Application à la Physique

$\mathbb{R}^3$ étant muni d'un produit scalaire, on considère l'espace affine euclidien associé $\mathscr{A}^3$ muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Soit $\overrightarrow{f} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ une fonction de classe C^1. À $t \in I$, on associe le point $M(t)$ de $\mathscr{A}^3$ tel que $\overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{f}(t)$.

L'ensemble $\Gamma = \{M(t),\ t \in I\}$ peut être interprété comme la trajectoire du mouvement d'une particule de $\mathscr{A}^3$.

La vitesse de cette particule p au temps t_0 est donnée par le vecteur $\overrightarrow{f'}(t_0) \in \mathbb{R}^3$ et la direction de son mouvement au temps t_0 est donnée par la tangente T_0 au point $M_0 = M(t_0)$ définie par :

$$M \in T_0 \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{f'}(t_0)(t - t_0).$$

Si p a une masse m, l'énergie cinétique $E(t)$ de la particule au temps t est définie par : $E(t) = \frac{1}{2}m(\overrightarrow{f'}(t) \cdot \overrightarrow{f'}(t))$; si $\overrightarrow{f''}$ existe, alors

$$\frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t} = m(\overrightarrow{f'}(t) \cdot \overrightarrow{f''}(t)).$$

Par conséquent, l'énergie cinétique de cette particule est constante si, à chaque instant t, le vecteur accélération $\overrightarrow{f''}(t)$ est perpendiculaire au vecteur vitesse $\overrightarrow{f'}(t)$.

Si la particule p est soumise à une force $\overrightarrow{F}(t)$, d'après la loi de Newton on a :

$$\overrightarrow{F}(t) = m\overrightarrow{f''}(t).$$

Par suite l'énergie cinétique est constante si et seulement $\overrightarrow{F}(t)$ est orthogonale à la direction du mouvement de la particule. On va illustrer ce qui précède par un exemple précis : la fonction vectorielle

$$\overrightarrow{f}(t) = (\cos t, \sin t, t)(t \in \mathbb{R})$$

définit une hélice circulaire de $\mathscr{A}^3$ d'axe $(O, \vec{k})$. On a :

$$\vec{f'}(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$$

$$\vec{f''}(t) = (-\cos t, -\sin t, 0)$$

$E(t) = \dfrac{1}{2}m(\sin^2 t + \cos^2 t + 1) = m$ et donc $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0$.

En d'autres termes : soit une particule p soumise à une force $\vec{F}(t) = m(-\cos t, -\sin t, 0)$. Si pour $t = 0$, sa position initiale est le point $(1, 0, 0)(= \vec{f}(0))$ et sa vitesse initiale le vecteur $(0, 1, 1)(= \vec{f'}(0))$, alors la trajectoire de son mouvement est une hélice circulaire définie par la fonction $\vec{f}(t) = (\cos t, \sin t, t)$.

7.5. Étude des courbes régulières de l'espace euclidien à 2 ou 3 dimensions

On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni d'un produit scalaire. $\mathscr{A}^3$ est l'espace affine euclidien associé d'origine O.

Définition — Un arc paramétré A de classe C^k de $\mathbb{R}^3$ est défini par le couple $(I, \vec{f})$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\vec{f}$ est une application $t \mapsto \vec{f}(t)$ de classe C^k de I dans $\mathbb{R}^3$. L'ensemble $f(I)$ est le support de A.

Si on interprète le paramètre t comme étant le temps, l'arc A apparaît comme la trajectoire du point M de $\mathscr{A}^3$, notée $T(\vec{f})$, définie par $\overrightarrow{OM}(t) = \vec{f}(t)$.

La notion d'arc paramétré ne coïncide pas avec celle de courbe telle qu'on l'entend en géométrie élémentaire : il existe par exemple plusieurs représentations paramétriques ayant comme support une circonférence de $\mathscr{A}^3$. Pour arriver à une notion géométrique on doit convenir que certaines représentations paramétriques de même support définissent la même courbe.

7.5.1. Définition

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Un difféomorphisme, de classe C^k de J sur I est une application bijective et de classe C^k de J sur I, dont la réciproque est aussi de classe C^k.

7.5.2. Définition

La représentation paramétrique $(J, \vec{g})$ est dite C^k-équivalente à $(I, \vec{f})$ s'il existe un difféomorphisme θ, de classe C^k, de J sur I tel que $\vec{g} = \vec{f} \circ \theta$.

7.5.3. Remarques

La relation $\mathscr{R}^k$: « $(J, \vec{g})$ est C^k-équivalente à $(I, \vec{f})$ » est symétrique et réflexive. La transitivité de $\mathscr{R}^k$ résulte du fait que l'application composée $\theta_1 \circ \theta_2$ de deux difféomorphismes θ_1 et θ_2 de classe C^k est encore un difféomorphisme de classe C^k. C'est donc une relation d'équivalence.

7.5.4. Définition

Soit $(I, \vec{f})$ un arc paramétré de classe C^k, sa classe d'équivalence $\overline{(I, \vec{f})}$ pour $\mathscr{R}^k$ définit un arc géométrique Γ de classe C^k. Les éléments de $\overline{(I, \vec{f})}$ sont les représentations paramétriques admissibles de Γ.

Tout élément $(J, \vec{g})$ de $\overline{(I, \vec{f})}$, tel que $\vec{g} = \vec{f} \circ \theta$ où θ est un difféomorphisme de classe C^k de J sur I, est appelé changement de paramètre admissible. Les propriétés géométriques de Γ sont, par définition, les propriétés du couple $(I, \vec{f})$ invariantes dans tout changement de paramètre admissible.

7.5.5. Orientation

Une application θ qui définit un changement de paramètre admissible étant un difféomorphisme, est toujours strictement monotone. Si dans la définition 7.5.2, on impose à θ d'être croissante, on obtient une relation d'équivalence $\mathscr{R}'^k$ plus restrictive que $\mathscr{R}^k$, dont chaque classe d'équivalence, modulo $\mathscr{R}'^k$, de représentations paramétriques de classe C^k, définit un arc orienté de classe C^k.

Ainsi, chaque représentation paramétrique $(I, \vec{f})$ de classe C^k détermine deux arcs orientés Γ^+ et Γ^-.

$$\Gamma^+ = \{(J, \vec{g}),\ \vec{g} = \vec{f} \circ \theta,\ \theta \text{ croissant}\}$$

$$\Gamma^- = \{(J, \vec{g}),\ \vec{g} = \vec{f} \circ \theta,\ \theta \text{ décroissant}\}$$

L'arc Γ^+, dont $(I, \vec{f})$ est une représentation paramétrique admissible, sera appelé arc orienté défini par $(I, \vec{f})$; et l'arc Γ^- sera dit orienté en sens contraire de Γ^+.

7.5.6. Définitions et remarques

1) Si $(I, \vec{f})$ et $(J, \vec{g})$ sont deux représentants du même arc orienté avec $\vec{g} = \vec{f} \circ \theta$, $\forall u, u' \in J$, $u < u' \Rightarrow t = \theta(u) < t' = \theta(u')$. On peut donc définir pour l'arc orienté une relation d'ordre sur les paramètres, ayant un caractère d'invariance pour tout changement de paramètre admissible conservant l'orientation.

On dit que l'arc géométrique est orienté à l'orientation de $(I, \vec{f})$ que l'on qualifie d'orientation dans le sens des t croissants.

2) Si $\vec{f}'(t) = \vec{0}$, le point $(t, \vec{f}(t))$ est dit singulier; cette définition est indépendante de la représentation paramétrique admissible considérée.

Un arc $(I, \vec{f})$ de classe C^k $(k \geq 1)$ est dit régulier si $\vec{f'}(t)$ ne s'annule pas sur I.

On ne considéra dans ce paragraphe que les arcs réguliers. On appellera invariant d'ordre k tout être géométrique de $(I, \vec{f})$ ne dépendant que de $\vec{f'}, \vec{f''}, \ldots, \vec{f^{(k)}}$, $(k \geq 1)$. On se propose dans la suite d'étudier les invariants d'ordre 1, 2 et 3 des courbes de $\mathscr{E}^3$.

3) Représentation normale — Soit (I, f) une représentation paramétrique d'un arc Γ de classe C^k, $k \geq 1$. Si $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ on a :

$$\vec{f}(t) = f_1(t)\vec{\imath} + f_2(t)\vec{\jmath} + f_3(t)\vec{k}$$
$$||\vec{f'}(t)|| = \sqrt{f_1'^2(t) + f_2'^2(t) + f_3'^2(t)}.$$

Choisissons un point A de la trajectoire $T(\vec{f})$ de $\vec{f}$ tel que $\overrightarrow{OA} = \vec{f}(t_0)$. La fonction $\Psi : t \mapsto ||\vec{f'}(t)||$ est continue sur I : il existe donc une fonction unique primitive s de Ψ sur I appelée abscisse curviligne comptée à partir de t_0 telle que $s(t_0) = 0$ et $s'(t) = ||\vec{f'}(t)||$; s est de classe C^k si $\vec{f}$ est de classe C^k. $s(I) = J$ est un intervalle de $\mathbb{R}$. $(I, \vec{f})$ étant régulier, $s'(t)$ est différent de zéro pour tout $t \in I$. Par suite s est inversible et la fonction φ réciproque de s est aussi de classe C^k.

Donc φ définit un changement de paramètre admissible, et $(J, f \circ \varphi)$ est une représentation paramétrique admissible appelée représentation normale de l'arc Γ.

En posant $\vec{g}(s) = \vec{f}(\varphi(s)), (s = s(t))$, on a $\vec{g'}(s) = \vec{f}'(\varphi(s))\,\varphi'(s)$ d'où $||\vec{g'}(s)|| = 1$. Un changement d'orientation de Γ change l'abscisse curviligne en son opposé (si l'origine ne change pas).

7.5.7. Invariants d'ordre 1 et 2 Courbure. Trièdre de Serret Frenet

7.5.7.1.

Soit $\Gamma = (I, \vec{f})$ un arc paramétré de classe C^1 régulier. Soient $\overrightarrow{OM} = \vec{f}(u)$ et $\overrightarrow{OM_1} = \vec{f}(u+h)$. On a :

$$\overrightarrow{MM_1} = \vec{f}(u+h) - \vec{f}(u) = h\vec{f'}(u) + h\vec{\varepsilon}(h) \text{ avec } \lim_{h \to 0} \vec{\varepsilon}(h) = \vec{0} \quad (1)$$

La formule (1) conduit à définir la droite $(M, \overrightarrow{f'}(t))$ comme étant la tangente à l'arc Γ au point M. Le vecteur $\overrightarrow{f'}(t)$ est un vecteur directeur de la tangente. Sa direction reste invariante dans tout changement de paramètre admissible $t = \theta(u)$. Si on ne considère que des changements de paramètre conservant l'orientation, $\theta'(u)$ est positif et le sens du vecteur directeur de la tangente reste invariant. La demi-droite définie par le point M, $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{f}(t)$ et le vecteur $\overrightarrow{f'}(t)$ constitue la tangente à Γ orientée dans le sens des t croissants.

Soit Γ un arc régulier et orienté de classe C^1 de $\mathscr{A}^3$, défini par une représentation normale $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{g}(s)$. À chaque point M de Γ on associe le vecteur $\vec{t} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}s}$. C'est un *vecteur unitaire* porté par la tangente orientée à Γ. Le plan perpendiculaire en M à la tangente est dit normal à Γ.

Courbure. La relation $\left\| \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}s} \right\| = 1$ entraîne : $\vec{t} \cdot \dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}s^2} = 0$. Donc le vecteur $\vec{\gamma} = \dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}s^2} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{t}}{\mathrm{d}s}$ (vecteur accélération) est perpendiculaire à Γ. Si $\vec{\gamma} \neq 0$, sa direction est par définition celle de la *normale principale* en M à Γ. Soit $\vec{n}$ le vecteur unitaire de cette normale ayant même sens que $\dfrac{\mathrm{d}\vec{t}}{\mathrm{d}s}$, on peut donc écrire :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{t}}{\mathrm{d}s} = C\vec{n} = \frac{1}{R}\vec{n}, \quad \text{avec} \quad C > 0}$$

Le coefficient C est appelé la courbure et R le rayon de courbure en M à Γ. Le plan déterminé par $\vec{t}$ et $\vec{n}$ est le *plan osculateur* à Γ en M. La normale en M au plan osculateur est appelée *binormale*; sa direction est celle du vecteur $\vec{b} = \vec{t} \wedge \vec{n}$. Le plan déterminé par M et les vecteurs $\vec{b}$, $\vec{t}$ est appelé *plan rectifiant*.

Le trièdre orthonormé direct constitué par les vecteurs $\vec{t}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$ est appelé *trièdre de Serret-Frenet* de Γ au point M.

Le plan osculateur est le plan de la courbe Γ si celle-ci est plane. Dans ce cas, le point I tel que $\overrightarrow{MI} = R\vec{n}$ est appelé centre de courbure en M à Γ.

7.5.7.2. Usage d'une représentation paramétrique quelconque

Si l'arc Γ est défini par une représentation paramétrique admissible quelconque $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{f}(u)$, on a :

$$\overrightarrow{f'}(u) = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{f}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}u} = v\vec{t}. \tag{2}$$

En posant $v = \dfrac{\mathrm{d}\, s}{\mathrm{d}\, u}$, on obtient :

$$\overrightarrow{f''}(u) = \frac{\mathrm{d}\, v}{\mathrm{d}\, u}\vec{t} + v\frac{\mathrm{d}\,\vec{t}}{\mathrm{d}\, u}$$

or

$$\frac{\mathrm{d}\,\vec{t}}{\mathrm{d}\, u} = \frac{\mathrm{d}\,\vec{t}}{\mathrm{d}\, s}\frac{\mathrm{d}\, s}{\mathrm{d}\, u} = \frac{v}{R}\vec{n}$$

d'où

$$\overrightarrow{f''}(u) = v'\vec{t} + \frac{v^2}{R}\vec{n} \tag{3}$$

Si u désigne le temps, $\vec{f}(u)$ est « le vecteur position », $\overrightarrow{f'}(u)$ le vecteur vitesse, $\overrightarrow{f''}(u)$ le vecteur accélération, $v(u)$ la vitesse numérique, v' l'<u>accélération tangentielle</u> et $\dfrac{v^2}{R}$ l'<u>accélération normale</u>.

Les relations (2) et (3) entraînent :

$$\overrightarrow{f'}(u) \wedge \overrightarrow{f''}(u) = \frac{v^3}{R}\vec{t} \wedge \vec{n} = \frac{v^3}{R}\vec{b}$$

d'où

$$\boxed{R = \frac{|v^3|}{\left\|\overrightarrow{f'}(u) \wedge \overrightarrow{f''}(u)\right\|} = \frac{\|\overrightarrow{f'}(u)\|^3}{\left\|\overrightarrow{f'}(u) \wedge \overrightarrow{f''}(u)\right\|}} \tag{4}$$

Le plan osculateur est déterminé par le point M, et les vecteurs $\overrightarrow{f'}(u)$ et $\overrightarrow{f''}(u)$. La condition pour qu'un point P appartienne à ce plan est :

$$\boxed{\left(\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{f'}(u), \overrightarrow{f''}(u)\right) = 0}$$

7.5.8. Invariants d'ordre 3 Torsion, formules de Frenet

Soit Γ un arc orienté de classe C^3 donné par une représentation normale $\overrightarrow{OM} = \vec{g}(s)$. En gardant les notations du 7.5.7, on voit alors que $\vec{b}$ est une fonction de classe C^1 de s et les relations : $\vec{b}\cdot\vec{b} = 1$, $\vec{t}\cdot\vec{b} = 0$ entraînent par dérivation :

$$\vec{b}\cdot\frac{\mathrm{d}\,\vec{b}}{\mathrm{d}\, s} = 0 \quad ; \qquad \vec{t}\cdot\frac{\mathrm{d}\,\vec{b}}{\mathrm{d}\, s} + \vec{b}\cdot\frac{\mathrm{d}\,\vec{t}}{\mathrm{d}\, s} = \vec{t}\cdot\frac{\mathrm{d}\,\vec{b}}{\mathrm{d}\, s} = 0.$$

donc $\dfrac{\mathrm{d}\,\vec{b}}{\mathrm{d}\, s}$ est orthogonal à $\vec{t}$ et $\vec{b}$.

On posera $\dfrac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}s} = \tau\vec{n}$: le nombre τ est appelé torsion de l'arc Γ et $T = \dfrac{1}{\tau}$ porte le nom de rayon de torsion. Le repère $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$ étant orthonormal, les relations $\dfrac{\mathrm{d}\vec{t}}{\mathrm{d}s} = \dfrac{\vec{n}}{R}$ et $\dfrac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}s} = \dfrac{\vec{n}}{T}$ entraînent :

$$\boxed{\begin{array}{c} \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}s} = \vec{t}\,; \quad \dfrac{\mathrm{d}\vec{t}}{\mathrm{d}s} = \dfrac{\vec{n}}{R}\,; \quad \dfrac{\mathrm{d}\vec{n}}{\mathrm{d}s} = -\dfrac{\vec{t}}{R} - \dfrac{\vec{b}}{T} \\ \dfrac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}s} = \dfrac{\vec{n}}{T} \end{array}}$$

Ces formules sont appelées formules de Serret-Frenet.

Si l'arc Γ est défini par une représentation paramétrique admissible quelconque $\overrightarrow{OM} = \vec{f}(u)$, on remarque que le nombre

$$\sigma = ||\vec{f'}(u)||^{-6}(\vec{f'}(u), \vec{f''}(u), \vec{f'''}(u))$$

reste invariant dans un changement de paramètre admissible, même si l'orientation de Γ n'est pas conservée. L'usage d'une représentation normale montre que $\sigma = -\dfrac{1}{R^2T}$.

d'où $$\boxed{\frac{1}{T} = -R^2\sigma = -\frac{(\vec{f'}(u), \vec{f''}(u), \vec{f'''}(u))}{\left\|\vec{f'}(u) \wedge \vec{f''}(u)\right\|^2}}$$

d'après la relation (4) de 7.5.7.2.

7.5.8.1. Remarque

On montre en utilisant les formules de Serret-Frenet qu'une courbe régulière de classe C^3 de $\mathscr{A}^3$ est définie, à un déplacement prés, par la donnée des fonctions $C(s)$ et $\tau(s)$ supposées continues $\left(C(s) = \dfrac{1}{R(s)}\right)$.

Ce résultat se démontre aisément dans le cas d'une courbe plane (cas où $\tau = 0$) : si on prend le plan de la courbe pour plan $x0y$ et si on pose, $\widehat{0x, \vec{t}} = \varphi$, $\widehat{0x, \vec{n}} = \varphi + \dfrac{\pi}{2}$, on a $\dfrac{\mathrm{d}\vec{t}}{\mathrm{d}s} = \vec{n}\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}$. D'où $C(s) = \dfrac{1}{R(s)} = \dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}$ et la détermination de l'arc Γ se ramène aux 3 quadratures :

$$\varphi = \varphi_0 + \int_{s_0}^{s} C(s)\,\mathrm{d}s, \quad x = x_0 + \int_{s_0}^{s} \cos\varphi(s)\,\mathrm{d}s, \quad y = y_0 + \int_{s_0}^{s} \sin\varphi(s)\,\mathrm{d}s$$

Une courbe plane est donc déterminée à un déplacement près, par la donnée de la fonction continue $C(s)$.

7.6. Courbes paramétrées planes

Soient l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ muni d'un produit scalaire et orienté, et $\mathscr{A}^2$ l'espace affine euclidien associé, rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit $M : I \to \mathscr{A}^2$, $t \mapsto M(t)$ une application d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathscr{A}^2$. Par définition :

$$\lim_{t \to t_0} M(t) = m \Leftrightarrow \lim_{t \to t_0} \overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{om}$$

$$M(t) \text{ est dérivable en } t_0 \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}(t) \text{ est dérivable en } t_0$$

la dérivée de $t \to M(t)$ est par définition $\dfrac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{OM}(t)}{\mathrm{d}t}$. Il est facile de voir que ces définitions sont indépendantes de l'origine O choisie dans $\mathscr{A}^2$.

7.6.1. Définitions

Une courbe paramétrée de $\mathscr{A}^2$ est une application $M : I \to \mathscr{A}^2$, $t \mapsto M(t)$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. L'image $\Gamma = M(S)$ est appelée courbe géométrique et on dit que M est un paramétrage de Γ.

L'objet de ce paragraphe est le « dessin » de Γ connaissant M. Les diverses techniques exposées ici permettent d'expliciter les propriétés essentielles de Γ, à l'aide du paramétrage M. Parmi les notions définies à l'aide de M, certaines, comme les notions de point régulier ou de point stationnaire, seront relatives à la courbe paramétrée M ; d'autres, comme les notions de point ordinaire, point d'inflexion, ou de point de rebroussement, sont relatives à la courbe géométrique Γ.

7.6.2. Étude locale

Soit $M : I \subset \mathbb{R} \to \mathscr{A}^2$ une courbe paramétrée plane et $\Gamma = M(I)$ la courbe géométrique associée. Soit $t_0 \in I$. On suppose que M est pourvue de dérivées de tous ordres en t_0. Pour étudier la forme de Γ au voisinage de $M_0 = M(t_0)$, on étudiera comment varie le vecteur $\overrightarrow{M_0M_1}$ où $M_1 = M(t_0 + h)$, quand h varie dans un voisinage de t_0.

D'après l'hypothèse de dérivabilité faite sur $M(t)$ on peut écrire, en posant $\overrightarrow{OM}(t) = \vec{f}(t)$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_0M_1} &= \vec{f}(t_0 + h) - \vec{f}(t_0)\\ &= h\vec{f'}(t_0) + \frac{h^2}{2!}\vec{f''}(t_0) + \cdots + \frac{h^n}{n!}(\overrightarrow{f^{(n)}}(t_0) + \vec{\varepsilon}(h))\end{aligned} \qquad (1)$$

avec $\lim\limits_{h \to 0} \vec{\varepsilon}(h) = \vec{0}$.

On définit un repère d'origine M_0, ayant pour vecteurs de base $(\vec{u}, \vec{v})$ où $\vec{u}$ est le premier vecteur dérivée de $\vec{f}(t)$ non nul en t_0, $\vec{v}$ le premier vecteur dérivée suivant qui ne soit ni nul ni colinéaire à $\vec{u}$. Soient X et Y les composantes de M_1 par rapport à ce repère.

1) Si $\overrightarrow{f'}(t_0) \neq 0$ et $\overrightarrow{f'}(t_0) \wedge \overrightarrow{f''}(t_0) \neq 0$, alors $\vec{u} = \overrightarrow{f'}(t_0)$ et $\vec{v} = \overrightarrow{f''}(t_0)$. La relation (1) permet alors d'écrire :

$$\overrightarrow{MM_1} = h\overrightarrow{f'}(t_0) + \frac{h^2}{2!}(\overrightarrow{f''}(t_0) + \vec{\varepsilon}(h))$$

Au voisinage de t_0 on a : $X \sim h$ et $Y \sim \frac{h^2}{2}$: d'où la figure 7.1 ($X \sim h$: X équivalent à h (4.4.1)).

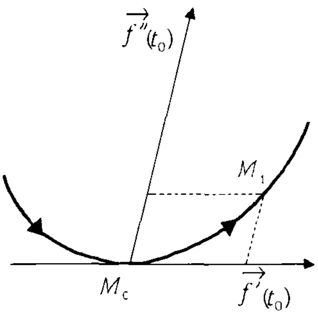


FIGURE: 7.1

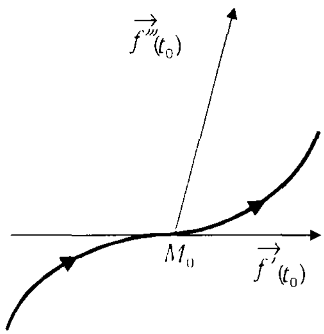


FIGURE: 7.2

$\overrightarrow{f''}(t_0)$ est dirigée vers la concavitée de la courbe Γ en M_0. M_0 est appelé *point ordinaire* de Γ

2) Si $\overrightarrow{f'}(t_0) \neq 0$, $\overrightarrow{f'}(t_0) \wedge \overrightarrow{f''}(t_0) = 0$, et $\overrightarrow{f'}(t_0) \wedge \overrightarrow{f'''}(t_0) \neq 0$, $\vec{u} = \overrightarrow{f'}(t_0)$, $\vec{v} = \overrightarrow{f'''}(t_0)$: d'où :

$$\overrightarrow{M_0M_1} = h\overrightarrow{f'}(t_0) + \frac{h^2}{2!}\overrightarrow{f''}(t_0) + \frac{h^3}{3!}(\overrightarrow{f'''}(t_0) + \vec{\varepsilon}(h))$$

et l'on en déduit que : $X \sim h$, $Y \sim \frac{h^3}{3!}$ (quand $t \to t_0$) : d'où la figure 7.2. M_0 est appelé *point d'inflexion* de Γ.

3) Si $\overrightarrow{f'}(t_0) = 0$, le point M_0 est dit stationnaire.

— Si $\overrightarrow{f''}(t_0) \neq 0$, $\overrightarrow{M_0M_1} = \frac{h^2}{2!}(\overrightarrow{f''}(t_0) + \vec{\varepsilon}(h))$ montre que $\overrightarrow{f''}(t_0)$ est un vecteur directeur de la tangente.

— Si $\overrightarrow{f''}(t_0) \wedge \overrightarrow{f'''}(t_0) \neq 0$, $\vec{u} = \overrightarrow{f''}(t_0)$, $\vec{v} = \overrightarrow{f'''}(t_0)$: d'où

$$\overrightarrow{M_0M_1} = \frac{h^2}{2!}\overrightarrow{f''}(t_0) + \frac{h^3}{3!}(\overrightarrow{f'''}(t_0) + \vec{\varepsilon}(h)).$$

Cette relation montre que $X \sim \dfrac{h^2}{2}$, $Y \sim \dfrac{h^3}{3!}$ (quand $t \to t_0$) ; d'où la figure 7.3.

M_0 est appelé un <u>*point de rebroussement de première espèce*</u>.

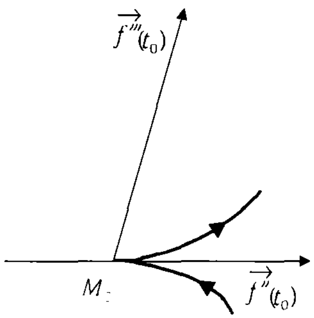


FIGURE: 7.3

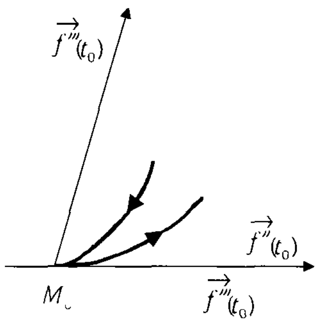


FIGURE: 7.4

— Si $\overrightarrow{f''}(t_0) \neq 0$, $\overrightarrow{f''}(t_0) \wedge \overrightarrow{f'''}(t_0) = 0$, $\overrightarrow{f''}(t_0) \wedge \overrightarrow{f^{(4)}}(t_0) \neq 0$ par un raisonnement analogue à celui fait ci-dessus, on a la figure 7.4. M_0 est appelé un <u>*point de rebroussement de deuxième espèce*</u>.

4) Plus généralement soient $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{f^{(p)}}(t_0)$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{f^{(q)}}(t_0)$.

- Si p est impair > 1, q pair, on a la figure 7.1 en plus aplatie : M_0 est un méplat.
- Si p est impair, q impair, on a la figure 7.2 : M_0 est un point d'inflexion.
- Si p est pair, q impair, on a la figure 7.3 : M_0 est un point de rebroussement de première espèce.
- Si p est pair, q pair, on la figure 7.4 : M_0 est un point de rebroussement de seconde espèce.

7.6.3. Conseils pour la construction de Γ

1) On détermine tout d'abord un ensemble minimum (D) de valeurs de t, tel que t parcourant (D), le point $M(t)$ décrive entièrement Γ.

2) Par des considérations de périodicité, de translation, et de symétrie, on détermine, si possible, un sous-ensemble (d) de (D) tel que la courbe géométrique complète se déduise de la courbe géométrique partielle ($t \in (d)$) par des transformations géométriques simples.

3) L'ensemble (d) est en général formé de plusieurs intervalles dont chacun donne un arc continue de Γ. On étudie les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ $\left(\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath}\right)$ aux extrémités des intervalles de (d). On peut avoir des branches infinies quand $t \to +\infty$, $t \to -\infty$, $t \to t_0^-$ ou $t \to t_0^+$.

L'étude étant la même, pour fixer les idées, on suppose que $t \to t_0^-$: trois cas peuvent se présenter :

- $x(t) \to x_0$ et $y(t) \to +\infty$ (ou $-\infty$) : la droite $x = x_0$ est asymptote.
- $x(t) \to +\infty$ (ou $-\infty$) $y(t) \to y_0$: la droite $y = y_0$ est asymptote.
- $x(t) \to +\infty$ (ou $-\infty$) et $y(t) \to +\infty$ (ou $-\infty$) : on étudie la limite

du rapport $\dfrac{y(t)}{x(t)}$ quand $t \to t_0^-$. Si $\dfrac{y(t)}{x(t)} \to a \in \mathbb{R}$, on forme $y(t) - ax(t)$: si $\lim\limits_{t \to t_0}(y(t) - ax(t)) = b$, alors $y = ax + b$ est l'équation d'une asymptote à la courbe. En général on obtient souvent a et b à l'aide des développements limités de $x(t)$ et $y(t)$.

Remarques

1) Si $a = +\infty$, ou bien si $a \in \mathbb{R}$ et $b = +\infty$ (ou $-\infty$), on dit que la courbe Γ admet une branche parabolique.

2) Supposons que $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

- Si $y(t) - ax(t) - b > 0$ la courbe est au-dessus de l'asymptote.
- Si $y(t) - ax(t) - b < 0$ la courbe est au-dessous de l'asymptote.

3) On détermine le sens de variation de $x(t)$, $y(t)$, généralement en étudiant les signes de $x'(t)$ et $y'(t)$. On consigne les résultats obtenus dans un tableau dont les lignes sont relatives à t, $x'(t)$, $y'(t)$, $x(t)$, $y(t)$. Une ligne supplémentaire relative à $\dfrac{y'(t)}{x'(t)}$ (pente de la tangente) est souvent utile.

4) On trace la courbe après avoir étudié les points remarquables : points stationnaires, points d'inflexion, points doubles (les points doubles s'obtiennent en résolvant le système $\begin{cases} x(t_1) &= x(t_2) \\ y(t_1) &= y(t_2) \end{cases}$

En fait un point $P \in \Gamma$ est dit double si un mobile décrivant la trajectoire Γ passe en P à deux instants différents t_1 et t_2.

7.6.4. Exemples

1) On considère la courbe Γ représentée paramétriquement par :

$$x(t) = 2t + t^2 \;, \quad y(t) = 2t - t^{-2}.$$

Montrer que Γ admet un point stationnaire A et indiquer la forme de Γ au voisinage de A.

Solution : $x'(t) = 2(1 + t)$, $y'(t) = 2(1 + \dfrac{1}{t^3})$, $x'(-1) = y'(-1) = 0$ implique que le point $A(-1, -3)$ est stationnaire. En posant $\overrightarrow{f}(t) = (2t + t^2, 2t - \dfrac{1}{t^2})$ on a : $\overrightarrow{f''}(-1) = (2, -6)$ et $\overrightarrow{f'''}(-1) = (0, -24)$; $\overrightarrow{f''}(1) \wedge \overrightarrow{f'''}(-1) \neq 0$, donc A est un point de rebroussement de première espèce.

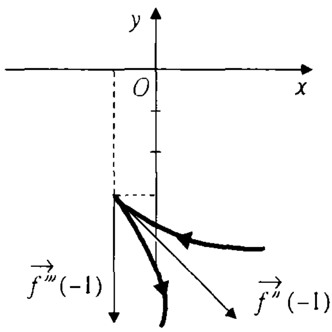


FIGURE: 7.5

2) Étudier la courbe Γ représentée paramétriquement par :

$$x(t) = \operatorname{tg} t\ , \quad y(t) = 2t - \operatorname{tg} t$$

i) Intervalle d'étude

• $D = \mathbb{R}$.

• $x(t+\pi) = x(t)$ et $y(t+\pi) = y(t) + 2\pi$ entraînent que Γ est invariante par la translation $T_{\vec{V}}$ de vecteur directeur $\vec{V} = (0, 2\pi)$. On restreint l'étude de Γ à l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et on translate par $T_{\vec{V}}$ la courbe partielle Γ_1 ainsi obtenue.

• $-x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$. Γ est invariante par la symétrie par rapport à O, donc Γ_1 aussi.

En définitive l'intervalle d'étude se réduit à $[O, \frac{\pi}{2}]$.

ii) branches infinies, asymptotes

$\lim\limits_{t \to \frac{\pi}{2}^-} x(t) = \lim\limits_{t \to \frac{\pi}{2}^-} y(t) = +\infty$.

$\lim\limits_{t \to \frac{\pi}{2}^-} \dfrac{y(t)}{x(t)} = -1$. $\lim\limits_{t \to \frac{\pi}{2}} (y(t) + x(t)) = \pi$ donc $y = -x + \pi$ est asymptote à Γ et comme $y(t) + x(t) - \pi = 2t - \pi < 0$, pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}[$, la courbe est au-dessus de l'asymptote pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

iii) Tableau de variation

$x'(t) = 1 + \operatorname{tg}^2 t$, $y'(t) = 1 - \operatorname{tg}^2 t$ et $\dfrac{y'(0)}{x'(0)} = 1$, la courbe admet comme tangente à l'origine la première bissectrice.

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
x'		$+$		$+$	
y'		$+$	0	$-$	
x	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$
y	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}-1$	$\searrow$	$-\infty$

La construction de Γ est laissée en exercice.

7.7. Courbes en coordonnées polaires

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ est toujours considéré ici muni d'un produit scalaire et orienté, et l'espace affine associé $\mathscr{A}^2$ rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Si une courbe Γ de $\mathscr{A}^2$ admet un paramétrage M de la forme

$$\overrightarrow{OM}(\theta) = f(\theta)\cos\theta\vec{\imath} + f(\theta)\sin\theta\vec{\jmath}, \quad \theta \in S \subset \mathbb{R},$$

alors $(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM}(\theta)) = \theta$ modulo π. Le paramètre θ peut être interprété comme étant une mesure de l'angle orienté (Ox, OM). On dit alors que $\underline{\rho = f(\theta),\ \theta \in S}$, est l'<u>équation polaire de Γ</u>. Les courbes polaires sont donc un cas particulier des courbes paramétrées étudiées en 7.6, auxquelles on pourrait appliquer les méthodes générales du paragraphe précédent. Mais il paraît plus simple, pour l'étude de ces courbes, d'employer des techniques spécifiques, exposées succinctement ci-dessous :

7.7.1. Définition

Soit $f : S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \theta \mapsto f(\theta)$. On dit qu'une courbe Γ de $\mathscr{A}^2$ admet l'<u>équation polaire</u> $\underline{\rho = f(\theta),\ \theta \in S}$ si et seulement si Γ est l'ensemble des points M de $\mathscr{A}^2$ tels que $\overrightarrow{OM} = f(\theta)\overrightarrow{u}(\theta)$ où $\theta \in S$, et $\overrightarrow{u}(\theta) = \cos\theta\vec{\imath} + \sin\theta\vec{\jmath}$. Γ admet donc le paramétrage : $M : S \subset \mathbb{R} \to \mathscr{A}^2\ \theta \mapsto M(\theta)$, défini par

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = f(\theta)\cos\theta\vec{\imath} + f(\theta)\sin\theta\vec{\jmath}, \text{ où } (\vec{\imath}, \overrightarrow{OM}) = \theta \quad (\pi)}$$

Les couples (ρ, θ), $(\rho, \theta+2k\pi)$, $(-\rho, \theta+\pi)$ définissent le même point de $\mathscr{A}^2$. Si $\rho = f(\theta)$ est représentée par Γ, alors $\rho = -f(\theta+\pi)$ est représentée aussi par Γ. On supposera dans la suite que la courbe $M : \theta \to M(\theta)$ est régulière.

7.7.2. Remarques

1) On indique ci-dessous les équations en coordonnées polaires de quelques courbes simples :

Équations en coordonnées cartésiennes	Équations en coordonnées polaires
Droite passant par O	
$y = x \operatorname{tg} \alpha$	$\theta = \alpha + k\pi$
Droite quelconque	
$ax + by = c$	$\rho = \dfrac{c}{a\cos\theta + b\sin\theta}$
Cercle de centre O et de rayon R	
$x^2 + y^2 = R^2$	$\rho = R$
Cercle passant par O	
$x^2 + y^2 - 2ax - 2by = 0$	$\rho = \sqrt{2a\cos\theta + 2b\sin\theta}$

2) Si $\vec{u}(\theta) = \cos\theta\vec{\imath} + \sin\theta\vec{\jmath}$,

$$\vec{u}'(\theta) = -\sin\theta\vec{\jmath} + \cos\theta\vec{\imath} = \cos(\theta + \frac{\pi}{2})\vec{\imath} + \sin(\theta + \frac{\pi}{2})\vec{\jmath}$$
$$= \vec{u}(\theta + \frac{\pi}{2})$$

Ainsi $(\vec{u}(\theta), \vec{u}'(\theta))$ est une base orthonormée directe. Le repère $(O\vec{u}(\theta), \vec{u}'(\theta))$ est appelé repère mobile. D'une façon générale on a :

$$\vec{u}^{(n)}(\theta) = \cos(\theta + n\frac{\pi}{2})\vec{\imath} + \sin(\theta + n\frac{\pi}{2})\vec{\jmath} \tag{1}$$

7.7.3. Étude locale

On considère une courbe Γ d'équation polaire $\rho = f(\theta)$, $\theta \in S$, où f est supposée de classe C^k pour k assez grand.

1) Étude en un point différent de l'origine O.

Soient OX, OY les axes ayant respectivement pour vecteurs unitaires $\vec{u}(\theta)$ et $\vec{u}'(\theta)$.

On a : $\overrightarrow{OM}(\theta) = f(\theta)\vec{u}(\theta)$, d'où

$$\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{OM}(\theta)}{\mathrm{d}\,\theta} = f'(\theta)\vec{u}(\theta) + f(\theta)\vec{u}'(\theta). \tag{1}$$

Si $M(\theta_0) \neq 0$, alors $f(\theta_0) \neq 0$ et (1) montre que $\dfrac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}\,\theta}(\theta_0)$ est un vecteur directeur de la tangente M_0T en M_0 à Γ.

Si on pose $V = (OX, M_0T)$ (angle de droites orienté), on a :

si $f'(\theta_0) \neq 0$ $\qquad \operatorname{tg} V = \dfrac{f(\theta_0)}{f'(\theta_0)}$.

si $f'(\theta_0) = 0$, alors $V = \dfrac{\pi}{2}(\pi)$ et on peut étendre la formule ci-dessus en donnant un sens à l'écriture $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2} = \infty = \dfrac{f(\theta_0)}{0}$.

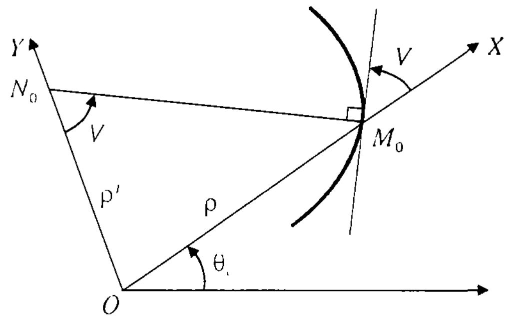


FIGURE: 7.6

Procédons à une étude analogue à 7.6.2. Posons

$$\overrightarrow{OM}(\theta) = \overrightarrow{E}(\theta) = f(\theta)\overrightarrow{u}(\theta)$$

$$\begin{aligned}\text{On a : } \overrightarrow{E}'(\theta) &= f'(\theta)\overrightarrow{u} + f(\theta)\overrightarrow{u}' \\ \overrightarrow{E}''(\theta) &= f''(\theta)\overrightarrow{u} + 2f'(\theta)\overrightarrow{u}' + f(\theta)\overrightarrow{u} \\ &= (f''(\theta) - f(\theta))\overrightarrow{u} + 2f'(\theta)\overrightarrow{u}'\end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{\overrightarrow{E}'(\theta) \wedge \overrightarrow{E}''(\theta) = [f(\theta)^2 + 2f'^2(\theta) - f(\theta)f''(\theta)]\vec{k} \qquad (\vec{k} = \vec{\imath} \wedge \vec{\jmath})}$$

Donc si $\overrightarrow{E}'(\theta) \wedge \overrightarrow{E}''(\theta) = (f(\theta)^2 + 2f'^2 - ff'')\vec{k} \neq \overrightarrow{0}$, le point $M(\theta)$ est un point ordinaire et si $f^2 + 2f'^2 - ff'' > 0$, la courbe tourne sa concavité vers O. ($\overrightarrow{E}''$ et $\overrightarrow{MO}$ sont d'un même côté de la tangente en M à Γ).

Si $\overrightarrow{E}'(\theta) \wedge \overrightarrow{E}''(\theta) = \overrightarrow{0}$, mais $\overrightarrow{E}'(\theta) \wedge \overrightarrow{E}'''(\theta) \neq \overrightarrow{0}$, alors le point $M(\theta)$ est soit un point ordinaire soit un point d'inflexion.

2) Étude au voisinage de l'origine.

On pose $\overrightarrow{E}(\theta) = \overrightarrow{OM}(\theta) = f(\theta)\overrightarrow{u}(\theta)$. On montre par récurrence, en utilisant la relation $C_{n+1}^p = C_n^{p-1} + C_n^p$, la formule suivante (formule de

Leibniz) :

$$\overrightarrow{E}^{(n)}(\theta) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)}(\theta)\overrightarrow{u}^{(k)}(\theta). \tag{1}$$

Soit θ_0 tel que $f(\theta_0) = 0$: on a $M(\theta_0) = O$.

Soit p le plus petit entier tel que $f^{(p)}(\theta_0) \neq 0$. d'après (1) on a :

$$\overrightarrow{E}^{(p)}(\theta_0) = f^{(p)}(\theta_0)\overrightarrow{u}(\theta_0)$$
$$\overrightarrow{E}^{(p+1)}(\theta_0) = f^{(p+1)}(\theta_0)\overrightarrow{u}(\theta_0) + (p+1)f^{(p)}(\theta_0)\overrightarrow{u}'(\theta_0)$$

par suite

$$\boxed{\overrightarrow{E}^{(p)}(\theta_0) \wedge \overrightarrow{E}^{(p+1)}(\theta_0) = \{(p+1)(f^{(p)}(\theta_0))^2\}\vec{k} \neq 0}$$

Donc d'après l'étude générale faite en 7.6.2 on peut énoncer :

- La courbe est tangente en O à $\overrightarrow{u}(\theta_0)$
- Si p est impair. O est un point ordinaire
- Si p est pair, O est un point de rebroussement de première espèce

7.7.4. Remarques et conseils à propos de la construction d'une courbe polaire $\Gamma : \rho = f(\theta)$.

1) On détermine tout d'abord un ensemble minimum (D) de valeurs de θ. tel que θ parcourant (D), le point $M(\theta)$ parcourt toute la courbe Γ.

2) Si $\rho = f(\theta)$ admet une période T. on construit l'arc Γ' pour $\theta \in [\theta_0, \theta_0 + T[\cap(D)$. la courbe complète s'obtient en faisant subir à Γ' des rotations autour de O et d'angle T.

3) Si $f(\alpha - \theta) = f(\theta)$, (Γ) admet la droite $\Delta : \theta = \dfrac{\alpha}{2} + k\pi$ comme axe de symétrie. Si Γ^+ désigne la partie de Γ pour laquelle $\theta \in (D)\cap[\alpha, +\infty[$, et si $\Gamma^- = S_\Delta(\Gamma^+)$. $S_\Delta$étant la symétrie par rapport à Δ. alors $\Gamma = \Gamma^- \cup \Gamma^+$.

4) Si. quand $\theta \to \alpha$, $f(\theta) \to +\infty$ (ou $-\infty$). $\theta = \alpha + k\pi$ définit une direction asymptotique OX. La branche infinie correspondante admet une asymptote D parallèle à OX si $y = f(\theta)\sin(\theta - \alpha)$ admet une limite L quand $\theta \to \alpha$. La droite $Y = L$ détermine alors cette asymptote : OA est appelée *sous-asymptote polaire* (Fig. 7.7).

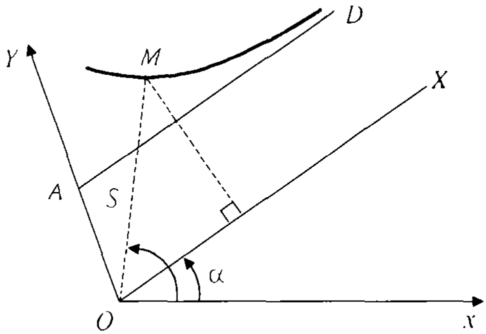
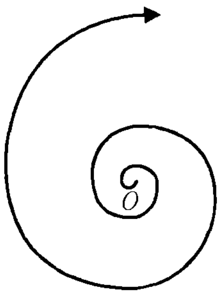


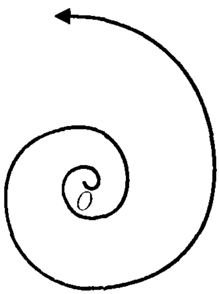
FIGURE: 7.7

5) Les spirales apparaissent pour $\theta \to -\infty$, ou $\theta \to +\infty$.



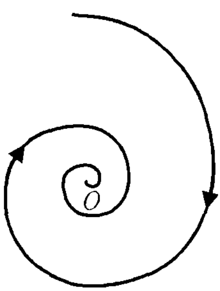
$f(\theta) \to +\infty$ (ou $-\infty$) quand $\theta \to -\infty$

FIGURE: 7.8



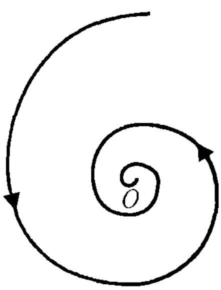
$f(\theta) \to +\infty$ (ou $-\infty$) quand $\theta \to +\infty$.

FIGURE: 7.9



$f(\theta) \to 0$ quand $\theta \to -\infty$

FIGURE: 7.10



$f(\theta) \to 0$ quand $\theta \to +\infty$.

FIGURE: 7.11

i) Si $f(\theta) \to +\infty$ (ou $-\infty$), la spirale s'agrandit avec $\|\overrightarrow{OM}(\theta)\|$ qui tend vers $+\infty$ (Fig.7.8,7.9).

ii) Si $f(\theta) \to 0$ la spirale « converge » vers l'origine (Fig.7.10,7.11).

iii) Si $f(\theta) \to a$ la spirale s'enroule autour d'un cercle de centre O et de rayon $|a|$, en restant à l'extérieur si

$$f(\theta) \to \begin{cases} a^+ & \text{où a>0} \\ a^- & \text{où a<0} \end{cases}$$

à l'intérieur si

$$f(\theta) \to \begin{cases} a^+ & \text{où a<0} \\ a^- & \text{où a>0} \end{cases}$$

6) On calcule f' et $\operatorname{tg} V = \dfrac{f}{f'}$. On étudie le sens de variation de f en dressant le tableau des variations.

7) Étude de points remarquables (point d'inflexion, point de rebroussement).

7.8. À RETENIR

1) $\mathbb{R}^n$ est normé. Soit $\overrightarrow{f} : I \to \mathbb{R}^n$ une application définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. $\overrightarrow{f}$ est dérivable en $t_0 \in \overset{\circ}{I}$ si et seulement si pour toute base $B = (\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \ldots, \overrightarrow{e}_n)$ de $\mathbb{R}^n$, les composantes f_k de $\overrightarrow{f}$ par rapport à B sont dérivables en t_0 et on a :

$$\boxed{\overrightarrow{f'}(t_0) = \sum_{i=1}^{n} f'_k(t_0)\overrightarrow{e}_k}$$

Si $\overrightarrow{f}$ est de classe C^p $(p \geq 1)$ on a :

$$\boxed{\overrightarrow{f}(t_0+h) = \overrightarrow{f}(t_0) + h\overrightarrow{f'}(t_0) + \frac{h^2}{2!}\overrightarrow{f''}(t_0) + \ldots + \frac{h^p}{p!}(\overrightarrow{f}^{(p)}_{t_0} + \overrightarrow{\varepsilon}(h))}$$

avec $\quad \lim\limits_{h \to 0} \overrightarrow{\varepsilon}(h) = 0.$

2) $\mathbb{R}^3$ est un espace vectoriel euclidien orienté et $\mathscr{A}^3$ l'espace affine associé à $\mathbb{R}^3$ d'origine O. Soient : $\overrightarrow{f} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\Gamma = \{M \in \mathscr{A}^3$ tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{f}(t), t \in I\}$ la trajectoire de $\overrightarrow{f}$, et s l'abscisse curviligne.

2.1) $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}s} = \vec{t}$ est le vecteur unitaire de la tangente orientée en M à Γ

2.2) $\dfrac{\mathrm{d}\vec{t}}{\mathrm{d}s} = \dfrac{\vec{n}}{R}$. $\vec{n}$ est le vecteur unitaire de la normale et $R > 0$ le rayon de courbure en M à Γ

2.3) $\vec{b} = \vec{t} \wedge \vec{n}$. $\vec{b}$ est le vecteur unitaire de la binormale en M à Γ. $(M, \vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$ est un repère orthonormé direct appelé repère de Serret-Frenet de Γ en M

2.4) $\dfrac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}s} = \dfrac{\vec{n}}{T}$. T est le rayon de torsion en M à Γ

2.5) $\dfrac{\mathrm{d}\vec{n}}{\mathrm{d}s} = -\dfrac{\vec{t}}{R} - \dfrac{\vec{b}}{T}$

3) $\mathscr{E}^2$ est un espace vectoriel euclidien orienté, et $\mathscr{A}^2$ le plan affine associé d'origine O.

3.1) Soit $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{f}(t)$, et Γ la trajectoire de M. Soit $\overrightarrow{f^{(p)}}(t)$ le premier vecteur dérivé non nul ($p \geq 1$) et $\overrightarrow{f^{(q)}}(t)$ le premier vecteur dérivé suivant non nul et non colinéaire à $\overrightarrow{f^{(p)}}(t)$.

On a :

si p est impair et q pair, $M(t)$ est un point ordinaire

si p est impair et q impair, $M(t)$ est un point d'inflexion

si p est pair, M est un point de rebroussement de première espèce si q est impair, de deuxième espèce si q est pair

3.2) Soit $\overrightarrow{OM} = f(\theta)\vec{u}(\theta)$, $\vec{u}(\theta) = \cos\theta\vec{\imath} + \sin\theta\vec{\jmath}$

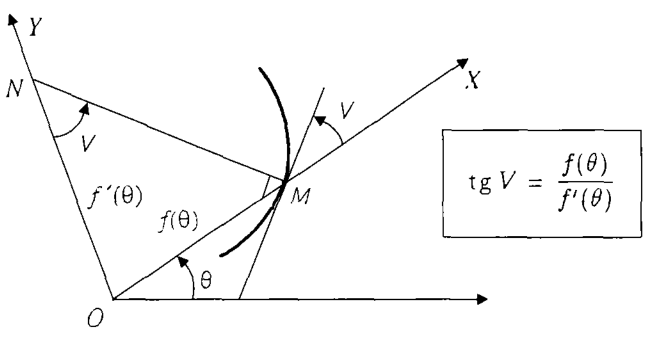


FIGURE: 7.12

Si $\lim_{\theta \to \alpha} |f(\theta)| = +\infty$, alors : $\overline{OA} = \lim_{\theta \to \alpha} f(\theta)\sin(\theta - \alpha)$ est la sous-asymptote polaire.

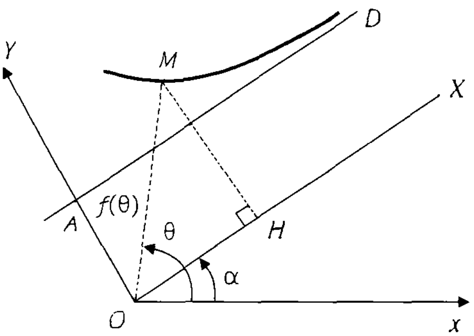


FIGURE: 7.13

7.9. Exercices et problèmes

1) Déterminer le rayon de courbure au point correspondant à $\theta = 0$ de la courbe d'équation polaire $\rho = 1 + 2\cos\frac{\theta}{2}$.

2) Déterminer les courbes tel que $R = a\sin\alpha$. (R = rayon de courbure ; $\alpha = (\vec{\imath}, \vec{t})$.

3) On considère l'arc paramétré Γ :

$$x(t) = a(t - \sin t), \quad y(t) = a(1 - \cos t), \quad t \in [0, 2\pi, \quad a > 0.$$

Γ étant orienté d'une façon quelconque, on appelle $(M, \vec{t}, \vec{n})$ le repère de Frenet en M et P le point défini par $\overrightarrow{MP} = -R\vec{n}$ (R = rayon de courbure au point M). Montrer que l'ensemble $\mathscr{C}$ des points P admet pour représentation paramétrique :

$$x(t) = a(t - 3\sin t), \quad y(t) = 3a(1 - \cos t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

construire $\mathscr{C}$.

4) Γ étant l'hyperbole équilatère d'équation $x \cdot y = a^2$ dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ orthonormé, la normale en un point M de Γ recoupe Γ en N.

Montrer que le point C défini par $\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{CM}$ est le centre de courbure de Γ en M.

5) Déterminer une droite qui soit à la fois tangente et normale à l'arc paramétré Γ :

$$x(t) = 3t^2 \quad , \quad y(t) = 2t^3 \quad (t \in \mathbb{R}).$$

6) Déterminer le trièdre de Frenet, la courbure et la torsion en un point $M(t)$ de l'arc :

$$x(t) = \frac{1}{2}\sin^2 t \quad , \quad y(t) = \frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} \quad , \quad z(t) = \sin t.$$

7) Construire la courbe Γ d'équation polaire $\rho = \dfrac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{4}}$. Déterminer le point double A.

Soit M un point quelconque de Γ d'angle polaire θ, D la droite d'angle polaire $\frac{\theta}{4}$, et P l'intersection de AM et de D. Montrer que le lieu géométrique de P quand M décrit Γ est un cercle dont on donnera les éléments caractéristiques.

8) Montrer que pour la courbe :

$$x = e^t \sin t,\ y = e^t \cos t,\ z = at$$

les axes du trièdre de Frenet forment des angles constants avec l'axe des x.

9) Déterminer la courbure et la torsion de la courbe Γ

$$x = a \operatorname{ch} t \cos t,\ y = a \operatorname{ch} t \sin t,\ z = at$$

Par un point $P \in \Gamma$, on considère une normale qui coupe l'axe des z en un point Q. Montrer que la longueur du segment PQ est égale au rayon de torsion au point P.

10) Montrer que les formules de Serret-Frenet peuvent s'écrire sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{t}}{\mathrm{d}\,s} = \overrightarrow{V}(s) \wedge \overrightarrow{t},\quad \frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{n}}{\mathrm{d}\,s} = \overrightarrow{V}(s) \wedge \overrightarrow{n},\quad \frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{b}}{\mathrm{d}\,s} = \overrightarrow{V}(s) \wedge \overrightarrow{b}$$

et déterminer $\overrightarrow{V}(s)$.

11) Prouver qu'une courbe Γ est plane dans les deux cas suivants :

1) la torsion est identiquement nulle

2) tous les plans osculateurs passent par un point fixe.

12) Un point P décrit une trajectoire régulière définie par :

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{f}(t) \quad \text{où}\ \overrightarrow{f}(t)\ \text{de classe}\ C^2$$

i) On suppose que $\overrightarrow{f}(t) \wedge \overrightarrow{f'}(t) = \overrightarrow{0}$. Montrer que $\overrightarrow{f}(t)$ garde une direstion fixe.

ii) On suppose que $\left(\overrightarrow{f}(t), \overrightarrow{f'}(t), \overrightarrow{f''}(t)\right) = 0$ (produit mixte). Montrer que $\overrightarrow{f}(t) \wedge \overrightarrow{f'}(t)$ garde une direction invariante et que $\overrightarrow{f}(t)$ appartient à un plan fixe.

Chapitre 8 : ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Introduction

Une grande variété de problèmes relatifs à la mécanique, l'astronomie, la physique mathématique, etc., conduisent à déterminer une fonction, inconnue, par la connaissance d'une équation reliant ses dérivées successives jusqu'à un certain ordre. Ces équations sont appelées équations différentielles. Leur étude constitue l'une des branches des mathématiques les plus fécondes.

Par exemple, on voudrait déterminer le mouvement d'une particule, connaissant sa vitesse et son accélération. Une substance radioactive se désintègre à une certaine vitesse, et l'on voudrait déterminer la matière fissile restante au bout d'un certain temps.

En général, on a affaire à deux sortes d'équations différentielles : les équations différentielles ordinaires et les équations aux dérivées partielles suivant que la fonction à déterminer est d'une variable ou de plusieurs variables.

Un exemple simple d'une équation différentielle ordinaire est la relation

$$y' - y = 0 \tag{1}$$

qui est satisfaite par la fonction $f(x) = e^x$. On montrera que toute solution de (1) est de la forme $f(x) = C e^x$, où C est une constante.

Une équation de la forme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \tag{2}$$

est un exemple d'une équation aux dérivées partielles. L'équation (2) appelée équation de Laplace apparaît en électricité, en magnétisme, en mécanique des fluides. Elle a plusieurs sortes de solutions

$$f(x, y) = x + 2y, \quad f(x, y) = e^x \cos y, \quad f(x, y) = \mathrm{Log}(x^2 + y^2).$$

Etant donnée une fonction F de $n + 1$ variables, on appelle équation différentielle (ordinaire) d'ordre n, toute relation de la forme:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

entre la variable x, la fonction $y(x)$ et ses dérivées $y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)$.

L'équation (1) est dite linéaire homogène (resp. linéaire non homogène) si F est une fonction linéaire (resp. affine) en $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$.

On appelle solution ou intégrale de l'équation (1) une fonction $f(x)$ définie sur un intervalle I telle que $F\left((x), f(x), f'(x), \ldots, f^{(n)}(x)\right) = 0$, $\forall x \in I$. Intégrer l'équation (1), c'est déterminer toutes ses solutions.

On dira que l'intégration de l'équation (1) a été ramenée à des quadratures si on a pu exprimer ses solutions au moyen d'intégrales de fonction connues.

L'étude des équations différentielles a débuté au XVII$^{\text{e}}$ siècle avec Newton, Leibniz et Bernoulli. On s'aperçoit alors progressivement qu'excepté très peu d'équations différentielles d'un certain type, il est pratiquement impossible de trouver une théorie mathématique générale permettant de résoudre les équations différentielles. Néanmoins on a établi des théorèmes d'existence et d'unicité des solutions d'une équation différentielle. Et l'on est ainsi amené à considérer les équations différentielles comme un moyen puissant de construction de fonctions nouvelles dont les propriétés sont étudiées à partir des équations différentielles elles-mêmes.

Parmi le peu d'équations qu'on peut résoudre, figurent les équations différentielles linéaires dont certains types sont étudiés dans ce chapitre.

8.1. Fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

$(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ étant la base canonique de $\mathbb{R}^2$, on identifie le corps des nombres complexes à l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ par la bijection

$$\begin{aligned} \theta\ &: \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2, \\ z = x + \mathrm{i}\, y &\mapsto \theta(x) = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} \end{aligned}$$

Ainsi toute fonction

$$\begin{aligned} h\ &: S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ &\qquad t \mapsto h(t) = f(t) + \mathrm{i}\, g(t) \end{aligned}$$

peut être interprétée comme une fonction

$$\begin{aligned} \vec{H}\ &: S \to \mathbb{R}^2 \\ &\qquad t \mapsto f(t)\vec{\imath} + g(t)\vec{\jmath} \end{aligned}$$

Si S est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, on sait (chapitre 7) que $\vec{H}$ est continue (resp. dérivable) en un point $t_0 \in S$ si et seulement si f et g sont continues (resp. dérivables) en t_0. Et $\vec{H}'(t_0) = f'(t_0)\vec{\imath} + g'(t_0)\vec{\jmath}$

Ceci nous amène à poser les définitions suivantes :

8.1.1. Définitions

Soit

$$\begin{aligned} h\ &: I \to \mathbb{C} \\ &t \mapsto f(t) + \mathrm{i}\, g(t) \end{aligned}$$

une fonction définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$. On dira que :

i) h admet une limite $l = l_1 + \mathrm{i}\, l_2$ en un point t_0, $I \sim t_0$, si et seulement si $\lim\limits_{t\to t_0} f(t) = l_1$ et $\lim\limits_{t\to t_0} g(t) = l_2$.

ii) h est continue en $t_0 \in I$ si et seulement $f : t \mapsto f(t)$ et $g : t \mapsto g(t)$ sont continues en t_0.

iii) h est dérivable en $t_0 \in I$ si et seulement les fonctions f et g sont dérivables en t_0, et la dérivée de h en t_0, notée $h'(t_0)$ est donnée par $h'(t_0) = f'(t_0) + \mathrm{i}\, g'(t_0)$.

8.1.2. L'exponentielle complexe

8.1.2.1. Définition

Soit $\alpha = a + \mathrm{i}\, b$ un nombre complexe fixé; $\exp \alpha x$, pour $x \in \mathbb{R}$, est le nombre complexe $\exp ax \exp \mathrm{i}\, bx$, où $\exp \mathrm{i}\, bx = \cos bx + \mathrm{i} \sin bx$ et $\exp ax = \mathrm{e}^{ax}$ a la signification habituelle.

On définit ainsi une application

$$\begin{aligned} \exp \alpha\ &: \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ &x \mapsto \exp \alpha(x) = \exp \alpha x \end{aligned}$$

8.1.2.2. Propriétés

On déduit des définitions 8.2.1 que, si $\alpha \in \mathbb{C}$, la fonction $\exp \alpha$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Un simple calcul montre que :

$$\boxed{\begin{array}{l} (\exp \alpha x)' = \alpha \exp \alpha x \quad \text{(donc } \exp \alpha x \text{ est indéfiniment dérivable)} \\ \exp \alpha x . \exp \beta x = \exp(\alpha + \beta) x, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{R}. \end{array}}$$

8.1.2.3. Exemple

On considère un mouvement vibratoire simple défini par :

$x = a \cos(\omega t + \varphi)$, $\quad a \in \mathbb{R}$.

On pose $\alpha = a \exp \mathrm{i}\, \varphi$; $a \cos(\omega t + \varphi)$ est alors la partie réelle de $\alpha \exp \mathrm{i}\, \omega t$.

Soit, par exemple, à composer deux mouvements vibratoires simples de même axe, de même centre, de même pulsation ω. Il s'agit donc d'étudier la somme

$f(t) = a_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + a_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$.

Les deux termes de cette somme sont les parties réelles de

$\alpha_1 \exp i\omega t \quad (\alpha_1 = a_1 \exp i\varphi_1)$ et de $\alpha_2 \exp i\omega t \quad (\alpha_2 = a_2 \exp i\varphi_2)$.

Donc $f(t)$ est la partie réelle de $(\alpha_1 + \alpha_2) \exp \omega t$ et définit par conséquent un mouvement vibratoire simple de pulsation ω et dont l'amplitude a et la phase φ sont données par la construction dite de Fresnel.

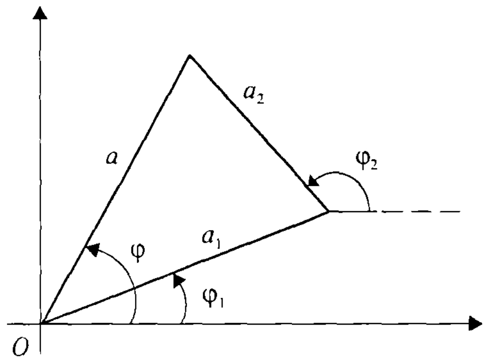


FIGURE: 8.1

8.1.3. Opérateur différentiel

8.1.3.1. Définition

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Si à toute fonction f, dérivable sur I, on fait correspondre sa fonction dérivée f', on définit un endomorphisme

$$D : \mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{C}) \mapsto \mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{C})$$
$$f \to f'$$

de l'espace vectoriel $\mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{C})$ des fonctions indéfiniment dérivables sur I, appelé opérateur différentiel.

Plus généralement, en posant $D^2 = D \circ D$, toute expression formelle de la forme $aD^2 + bD + c \quad (a, b, c \in \mathbb{C})$, définit un endomorphisme de $\mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{C})$, qui associe à tout élément f de $\mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{C})$, la fonction $(aD^2 + bD + c)f = af'' + bf' + cf$; on dira encore que $aD^2 + bD + c$ est un opérateur différentiel.

8.1.3.2. Remarque

Certains appareils mécaniques ou électroniques appelés filtres linéaires ont le pouvoir de transformer un signal d'entrée $f(t)$ en un signal de sortie $Af'' + Bf' + Cf$ où A, B, C sont des coefficients réels.

Si le signal d'entrée est de la forme $\alpha \exp i\omega t$ (α complexe, ω réel), étudions le signal de sortie dans un filtre linéaire de formule $D^2 + 1$.

On a $(D^2+1)(\alpha \exp i\omega t) = \alpha(1-\omega^2)\exp i\omega t$. Le signal de sortie est donc $\alpha(1-\omega^2)\exp i\omega t$.

La phase $\overline{\varphi}$ du signal de sortie est

$$\overline{\varphi} = \varphi \begin{cases} \text{à } 2k\pi \text{ près} & \text{si } 1-\omega^2 > 0 \\ \text{à } (2k+1)\pi \text{ près} & \text{si } 1-\omega^2 < 0 \end{cases}$$

L'amplitude $\overline{A}$ du signal de sortie est égale à $A|1-\omega^2|$, $A = |\alpha|$.

8.1.3.3. Proposition

Soient α et β les racines dans $\mathbb{C}$ de l'équation $AX^2 + BX + C = 0$, $A, B, C \in \mathbb{C}$. Alors pour tout $f \in \mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{C})$, on a :

$$\boxed{(AD^2 + BD + C)f = A(D-\alpha)\,[(D-\beta)f]} \tag{1}$$

Preuve — On vérifie la relation (1) par un calcul direct : $(D-\beta)f = f' - \beta f$. Posons $\varphi = f' - \beta f$. $A(D-\beta)\varphi = A(\varphi' - \alpha\varphi) = A\,(f'' - (\alpha+\beta)f' + \alpha\beta f)$

Comme $-A(\alpha+\beta) = B$ et $A\alpha B = C$ on trouve bien :

$$\begin{aligned} A(D-\alpha)\,[(D-\beta)f] &= Af'' + Bf' + Cf \\ &= (AD^2 + BD + C)f \end{aligned}$$

8.2. Équations différentielles du premier ordre Équations différentielles linéaires du premier ordre

8.2.1. Généralités

Soit l'équation différentielle du 1er ordre :

$$F(x, y, y') = 0. \tag{1}$$

Si F est de classe C^1 et si $F'_{y'}(x, y, y') \neq 0$, le théorème des fonctions implicites permet de résoudre localement cette équation en y' et on est alors amené à étudier une équation de la forme

$$y' = f(x, y). \tag{2}$$

En fait une équation différentielle de la forme (1) n'est pas nécessairement équivalente à une équation de la forme (2). Il se peut en effet que (1) admette une solution qui annule $F'_{y'}(x, y, y')$. De telles solutions sont dites singulières .

Par exemple pour l'équation $xy' - y = 0$, la solution dont le graphe est $(0, 0)$ est une solution singulière.

Dans la suite, on n'aura à considérer que des équations de la forme (2). Pour ces équations on admettra le théorème suivant :

8.2.1.1. Théorème de Cauchy-Lipschitz

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et soit $f\ : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction continue et pourvue d'une dérivée partielle par rapport à y continue sur Ω.

Quel que soit le point (x_0, y_0) de Ω, il existe une solution unique $y(x)$ de l'équation $y' = f(x, y)$ définie dans un voisinage de x_0 et telle que $y(x_0) = y_0$.

Remarque — Ce théorème garantit, sous certaines conditions, l'existence de solutions d'une équation différentielle. Mais il n'est pas toujours possible de déterminer effectivement ces solutions; par exemple pour l'équation $y'(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$, on ne sait pas calculer de façon explicite une primitive de la fonction $x \to \mathrm{e}^{-x^2}$. Dans ce cas on cherchera à trouver des solutions approchées.

8.2.1.2. Intégration numérique

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$.

Si l'équation différentielle $y' = f(x, y)$ possède une solution unique $y(x)$, telle que $y(x_0) = y_0$, cette solution s'écrit

$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(u, y(u))\,\mathrm{d}\,u.$

En choisissant un pas d'intégration h et en posant $\begin{cases} x_n = x_0 + nh \\ y(x_n) = y_n \end{cases}$

on obtient le système

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h \\ y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f\,(u, y(u))\,\mathrm{d}\,u \end{cases}$$

Les différentes méthodes d'intégration numérique reposent sur un calcul approché de l'intégrale

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f\,(u, y(u))\,\mathrm{d}\,u.$$

Par exemple, en utilisant la méthode des rectangles on a:

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f\,(u, y(u))\,\mathrm{d}\,u \approx hf(x_n, y_n)$$

d'où $\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h \\ y_{n+1} \approx y_n + h\,(f(x_n, y_n)) \end{cases}$ ce qui revient à remplacer le point $P_{n+1}(x_{n+1}, y_{n+1})$ par le point $P'_{n+1}(x_{n+1}, y_{nh} + hy'_n)$ appartenant à la tangente en P_n à la courbe intégrale

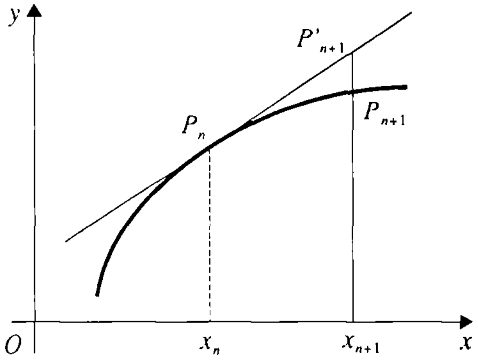


FIGURE: 8.2

Cette méthode, dite méthode d'Euler, n'est pas assez précise. On peut l'améliorer en évaluant l'intégrale $\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(u, y(u))\, du$ par la méthode des trapèzes, en posant

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(u, y(u))\, du \approx \frac{1}{2}\left(f(x_n, y_n) + (f(x_{n+1}, y_{n+1})\right).$$

8.2.1.3. Interprétation géométrique.

Soit $y' = f(x, y)$ une équation différentielle, où

$$\begin{aligned} f:\quad & \Omega \to \mathbb{R} \\ & (x, y) \mapsto y' = f(x, y) \end{aligned}$$

est une application d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

A tout point M de l'ouvert Ω du plan on associe la droite MT de coefficient directeur y'.

Le couple (M, MT) est appelé un élément de contact, et l'application $M \to (M, MT)$ s'appelle *un champ d'éléments de contact* dans le plan. Une courbe (C) est une courbe intégrale si l'ensemble de ses éléments de contact appartient au champ précédent.

8.2.1.4. Equation différentielle attachée à une famille de courbes

Soit une famille de courbes C_λ dépendant d'un paramètre λ et définie par l'équation

$$f(x, y, \lambda) = 0. \qquad (1)$$

f étant supposée continue sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^3$ et de classe C^1 par rapport à (x, y). On suppose qu'en tout point $M(x, y)$ d'un ouvert du plan passe au moins une courbe C_λ. Le coefficient directeur y' de la tangente en M à la courbe C_λ étant donné par :

$$f'_x(x, y, \lambda) + f'_y(x, y, \lambda) \cdot y' = 0. \tag{2}$$

L'élimination de λ entre (1) et (2) donne une relation qui définit les éléments de contact des courbes C_λ :

$$F(x, y, y') = 0 \tag{3}$$

La connaissance de l'équation différentielle $F(x, y, y') = 0$ permet d'obtenir un certain nombre de renseignements sur les courbes C_λ.

Les trajectoires orthogonales des courbes C_λ sont les solutions de l'équation différentielle $F(x, y, -\frac{1}{y'}) = 0$ obtenue en changeant y' en $-\frac{1}{y'}$ dans l'équation (3). En effet supposant l'équation (3) résoluble par rapport à y'. Soit $y' = f(x, y)$ sa forme normale. La tangente en $M(x, y)$ de C_λ a pour pente $m = y' = f(x, y)$ (en axes orthonormées). S'il existe une courbe Γ orthogonale en M à C_λ, sa tangente en ce point a pour pente $m' = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{y'}$.

L'équation différentielle des courbes Γ s'écrit donc :

$$-\frac{1}{y'} = f(x, y) \quad \text{ou} \quad F\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0$$

Exemple — Déterminer les trajectoires orthogonales à la famille des cercles C_λ passant par l'origine et centrés sur l'axe des x.

La famille des cercles C_λ est donnée par l'équation $x^2 + y^2 - 2\lambda x = 0$. L'équation différentielle qui définit la famille C_λ est : $y' = \dfrac{y^2 - x^2}{2xy}$. Les trajectoires orthogonales satisfont donc l'équation différentielle.

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2} \tag{1}$$

$$(1) \Leftrightarrow (2)\, \mathrm{d}\, y(x^2 - y^2) - 2xy \,\mathrm{d}\, x = 0$$

et pour $y \neq 0$

$$(2) \Leftrightarrow \qquad \frac{x^2 - y^2}{2y^2}\,\mathrm{d}\, y - \frac{x}{y}\,\mathrm{d}\, x = 0.$$

En considérant la fonction $f(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{-2y}$, l'équation (2) s'écrit $f'_y \,\mathrm{d}\, y + f'_x \,\mathrm{d}\, x = 0$.

Par suite la famille des courbes orthogonales est déterminée par l'équation $f(x, y) = C$, soit $x^2 + y^2 - 2Cy = 0$. Ce sont des cercles passant par l'origine et centrés sur l'axe des y (5.8.3.4).

8.2.2. Équations différentielles linéaires du 1er ordre

Soit l'équation différentielle du 1er ordre

$$F(x, y, y') = 0. \tag{1}$$

D'après les définitions du 8.1. l'équation est dite linéaire, si pour tout x fixé, F est une application linéaire ou affine en y et y'. Donc l'équation (1) est linéaire si elle s'écrit sous la forme

$$a_1(x)y' + b_1(x)y + c_1(x) = 0. \tag{2}$$

Dans ce cas $F'_y(x, y, y') = a_1(x)$. Toute solution passant par un point (x_0, y_0) tel que $a_1(x_0) = 0$ est dite singulière. En dehors des solutions singulières l'équation (2) est équivalente à

$$y' - a(x)y = b(x) \tag{3}$$

où $a(x) = -\dfrac{b_1(x)}{a_1(x)}$, $b(x) = -\dfrac{c_1(x)}{a_1(x)}$. L'équation

$$y' - a(x)y = 0 \tag{3'}$$

est appelée équation homogène (ou sans second membre) associée à l'équation (3).

On supposera dans ce qui suit que $a(x)$ et $b(x)$ sont des fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

8.2.2.1. Proposition

Toute solution de l'équation (3) s'obtient en ajoutant à une solution particulière de cette équation, toute solution de l'équation homogène (3') associée.

Preuve — Soit $f(x)$ une solution quelconque de (3). Donc :

$f'(x) - a(x)f(x) = b(x)$.

Soit $f_1(x)$ une solution particulière de (3), on a :

$f_1'(x) - a(x)f_1(x) = b(x)$

en retranchant membre à membre ces deux équations on obtient :

$(f - f_1)'(x) - a(x)(f - f_1)(x) = 0$

La fonction $f - f_1$ est une solution de (3'). L'intégration de (3) se fait donc en deux étapes :

1) recherche de toutes les solutions de (3'),

2) recherche d'une solution particulière de (3).

Première étape — Soit $A(x)$ une primitive de $a(x)$ sur I; la fonction $x \mapsto f(x) = \exp A(x)$ est une solution de (3'). En effet $f'(x) = a(x)\exp A(x) = a(x)f(x)$.

Soit $g(x)$ une solution quelconque de (3') définie sur I. Posons $h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$, $(f(x) \neq 0)$. On a :

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{g'(x)f(x) - f'(x)g(x)}{(f(x))^2} \\ &= \frac{a(x)g'(x)f(x) - a(x)f(x)g(x)}{(f(x))^2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc $h(x) = C$, où C est une constante; et par suite $g(x) = C \exp A(x)$.

Remarque : l'ensemble des solutions de (3') est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 1.

Deuxième étape — Il reste à trouver une solution particulière de (3). Pour cela il est conseillé de procéder tout d'abord par tâtonnements : on remplace y par une fonction simple : une constante, x, (ou $-x$), x^2 (ou $-x^2$), $\frac{1}{x}$, $\sin x$, $\cos x$, etc., selon la forme de l'équation.

Si les essais n'aboutissent pas, on utilise la méthode dite de la variation de la constante ou méthode de Lagrange : comme $\exp A(x) \neq 0$ $\forall x \in I$, toute solution $g(x)$ de (3) s'écrit sous la forme $g(x) = C(x) \exp A(x)$; d'où l'idée naturelle de chercher $g(x)$ sous cette forme, où la fonction $C(x)$ est de classe C^1.

Exprimons que $g(x) = C(x) \exp A(x)$ est solution de (3) . On a: $C'(x) \exp A(x) + C(x)a(x) \exp A(x) - a(x)C(x) \exp A(x) = b(x)$ d'où $C'(x) = b(x) \exp[-A(x)]$.

8.2.2.2. Théorème

Soit l'équation différentielle

$$y' - a(x)y = 0, \tag{1}$$

où $a(x)$ est une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. La solution générale de (1) est de la forme :

$$\boxed{y = K \exp A(x)}$$

où K est une constante et $A(x)$ une primitive de $a(x)$ sur I. La solution générale de l'équation différentielle

$$y' - a(x)y = b(x) \tag{2}$$

où $a(x)$ et $b(x)$ sont des fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, est de la forme :

$$\boxed{y = (K + C(x)) \exp A(x)}$$

où K est une constante et $C(x)$ est une primitive de $b(x)\exp -A(x)$ sur I.

8.2.2.3. Résolution de l'équation $y' = B\exp \beta x$

Soit l'équation $y' - \alpha y = B\exp \beta x$ où α, β et B sont des constantes complexes. Compte tenu des propriétés de la fonction $\exp \alpha x$, on peut appliquer la méthode de résolution ci-dessus à l'équation différentielle

$$y' - \alpha y = B\exp \beta x, \tag{1}$$

que l'on rencontre fréquemment en physique.

$$y' - \alpha y = 0 \Leftrightarrow y = K\exp \alpha x, \qquad K \in \mathbb{C}.$$

On cherche une solution particulière de l'équation (1) sous la forme $g(x) = C(x)\exp \alpha x$ où $C(x)$ est une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. On obtient :

$$C'(x) = B\exp(\beta - \alpha)x.$$

Donc :

(i) si $\alpha = \beta$, $C(x) = Bx$ convient et on a : $g(x) = Bx\exp \alpha x$. La solution générale de (1) est de la forme :

$$\boxed{y = (Bx + K)\exp \alpha x}$$

(ii) si $\alpha \neq \beta$, on peut prendre $C(x) = \dfrac{B\exp(\beta - \alpha)x}{\beta - \alpha}$ et la solution générale de (1) s'écrit :

$$\boxed{y = K\exp \alpha x + \frac{B\exp \beta x}{\beta - \alpha}}$$

8.2.2.4. Applications

1) Amortissement d'une dette, au taux d'intérêt α, moyennant des remboursements fixes γ.

Si $y(t)$ est le montant de la dette à l'instant t, à l'instant $t + h$, on a : $y(t+h) = y(t) + h\alpha y(t) - \gamma h$

d'où $\dfrac{y(t+h) - y(t)}{h} = +\alpha y(t) - \gamma$.

Cette situation peut être alors modélisée par l'équation différentielle

$$y' - \alpha y + \gamma = 0. \tag{1}$$

Les solutions de (1) sont de la forme :

$$y = K\exp \alpha t + \frac{\gamma}{\alpha}.$$

L'amortissent d'une dette, contractée à un taux d'intérêt α l'an, avec des remboursements annuels γ, et amortie en 10 ans, est donnée par :

$$y = +\frac{\gamma}{\alpha}\left(1 - \exp[-10\alpha]\right).$$

2) Une particule radioactive p se désintègre à une vitesse v qui est proportionnelle à la masse m de p à chaque instant. m_0 étant la masse initiale, déterminer la période de désintégration de p.

Solution : On a $v = \dfrac{\mathrm{d}\, m}{\mathrm{d}\, t} = km$, avec $k < 0$, d'où $m(t) = C \cdot \mathrm{e}^{kt}$; $m(0) = m_0 \Rightarrow m(t) = m_0\,\mathrm{e}^{kt}$. La période λ de p est le temps au bout duquel on a : $m(\lambda) = \dfrac{m_0}{2} = m_0\,\mathrm{e}^{k\lambda}$. Cette égalité entraîne que $\lambda = -\dfrac{\operatorname{Ln} 2}{k}$.

8.2.3. Équations à variables séparables Équations homogènes

8.2.3.1. Équations à variables séparables

Soit l'équation différentielle

$$y' = f(x, y). \tag{1}$$

On dira que l'équation est à variables séparables si $f(x, y) = a(x)c(y)$; l'équation (1) s'écrit alors

$$y' = a(x)c(y). \tag{2}$$

On a déjà étudié ce genre d'équation au 8.5.3.4. Si $c(y) \neq 0$ l'équation s'écrit sous la forme :

$$\omega = a(x)\,\mathrm{d}\, x - b(y)\,\mathrm{d}\, y = 0, \qquad \text{où} \quad b(y) = \frac{1}{c(y)}. \tag{3}$$

Si $A(x)$ (*resp.* $B(y)$) est une primitive de $a(x)$ (*resp.* $b(y)$), la fonction $f(x, y) = A(x) - B(y)$ vérifie $\omega = \mathrm{d}\, f$. Donc ω est exacte et les solutions de (3) sont définies implicitement par l'équation $A(x) - B(y) = K$, K constante.

Exemple : résoudre l'équation

$$xy' + y = y^2. \tag{1}$$

Les fonctions dont les graphes sont respectivement (0,0) la droite $y = 0$ et la droite $y = 1$ sont solutions de (1). En dehors de ces solutions, l'équation (1) est équivalente à :

$$\omega = +\frac{\mathrm{d}\, y}{y(y-1)} - \frac{\mathrm{d}\, x}{x} = 0. \tag{2}$$

Les solutions de (2) sont données implicitement par l'équation :

$$\int \frac{\mathrm{d}\,y}{y(y-1)} - \int \frac{\mathrm{d}\,x}{x} = K, \text{ soit } \ln|y-1| - \ln|y| = \ln|x| + K.$$

D'où $\left|\dfrac{(y-1)}{y}\right| = |x|\,\mathrm{e}^{K}. \Rightarrow \dfrac{y-1}{y} = Cx$. Cétant une constante.

On tire de cette relation : $y = \dfrac{1}{1-Cx}$.

8.2.3.2. Équations homogènes

Une fonction $f(x,y)$ est dite homogène (de degré 0) si :

$$f(tx,ty) = f(x,y), \quad \forall x,y,t, \quad t \neq 0.$$

Une équation différentielle

$$y' = f(x,y) \tag{1}$$

est dite homogène, si $f(x,y)$ est homogène (de degré 0).

Soit $(M(x,y), MT)$ l'élément de contact défini par (1). Si l'équation (1) est homogène, la tangente au point $M'(\lambda x, \lambda y)$ $(\lambda \neq 0)$ est parallèle à MT. Donc l'ensemble des courbes intégrales de (1) est globalement invariant par toute homothétie de centre O.

Par suite y' ne dépend que du rapport $\dfrac{y}{x}$. En posant $t = \dfrac{1}{x}(x \neq 0)$ l'équation (1) devient

$$y' = f\left(1, \frac{y}{x}\right) \tag{2}$$

Posons $v = \dfrac{y}{x}$, alors $y = vx$ et $y' = v'x + v$. L'équation (2) se transforme alors en l'équation : $v'x + v = f(1,v)$, soit :

$$\frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,x} = (f(1,v) - v)\,\frac{1}{x}. \tag{3}$$

et l'on est ainsi amené à résoudre une équation à variables séparables.

Exemple : résoudre l'équation :

$$y'(y+x) - (y-x) = 0. \tag{1}$$

(1) admet pour solution singulière la fonction dont le graphe est (0,0). En dehors de cette solution singulière,

$$y' = \frac{y-x}{y+x}. \qquad (1) \Leftrightarrow (2)$$

Posant $y = vx$, on obtient : $xv' = \dfrac{1+v^2}{v+1}$, qui est a variables séparables, d'où :

$$\int \frac{v \cdot \mathrm{d}\,v}{1+v^2} + \int \frac{\mathrm{d}\,d}{1+v^2} = -\int \frac{\mathrm{d}\,x}{x} + C.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + \mathrm{Arctg}\,\frac{y}{x} = C.$$

8.3. Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Soit

$$F(x, y, y', y'') = 0 \tag{1}$$

une équation différentielle du second ordre. Conformément aux définitions de 8.1, l'équation (1) est dite linéaire, si pour x fixé l'application $(y, y', y'') \mapsto F(x, y', y'')$ est une application linéaire ou affine de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{C}$. Dans ce cas l'équation (1) s'écrit :

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x) \tag{2}$$

l'équation (2) est dite à coefficients constants si $a(x)$, $b(x)$ et $c(x)$ sont des constantes.

Dans ce paragraphe, on étudie les équations de la forme

$$ay'' + by' + cy = g(x) \tag{3}$$

où a, b, c sont des constants réelles ou complexes, $g(x)$ une fonction à valeurs réelles ou complexes, continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Comme dans 8.3.2, on associe à (3) l'équation linéaire et homogène :

$$ay'' + by' + cy = 0. \tag{3'}$$

En raisonnant de la même manière qu'en 8.3.2, on peut alors énoncer :

8.3.1. Proposition

Toute solution de l'équation (3) s'obtient en ajoutant à une solution particulière de cette équation, toute solution de l'équation sans second membre (3') associée à (3).

8.3.2. Intégration de l'équation différentielle

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{1}$$

où a, b sont des constantes réelles ou complexes. Soit $f(x)$ une solution de (1). on a:

$$f''(x) + af'(x) + bf(x) = (D^2 + aD + b)\,(f(x))$$

ou bien :

$$f'' + af' + bf = (D^2 + aD + b)f$$

où D est l'opérateur différentiel : $D(f) = f'$.

D'après le paragraphe 8.2.3.3,

$$(D^2 + aD + b)(f) = [(D - \beta) \cdot (D - \alpha)]\,(f) \tag{2}$$

où α et β sont les racines du trinôme du second degré $x^2 + ax + b = 0$.

Posons $(D - \alpha)(f) = \varphi$. Intégrer (2) revient à intégrer successivement :

$$(D - \beta)\varphi = 0 \tag{3}$$

$$(D - \alpha)(f) = \varphi. \tag{4}$$

D'après les résultats de 8.3.2.3. les solutions de l'équation (3) sont de la forme : $\varphi = C' \exp \beta x$. C' étant une constante arbitraire réelle ou complexe. L'équation (4) s'écrit alors :

$$(D - \alpha)f = C' \exp \beta x$$

Et a pour solutions (8.3.2.3) :

$$f(x) = A \exp \alpha x + B \exp \beta x, \quad \text{si } \alpha \neq \beta \left(B = \frac{C'}{\beta - \alpha}\right)$$

et

$$f(x) = (Ax + B) \exp \alpha x \quad \text{si } \alpha = \beta.$$

A et B sont des constantes arbitraires réelles ou complexes.

On peut donc énoncer

8.3.2.1. Théorème

Soit l'équation différentielle

$$\boxed{y'' + ay' + by = 0} \tag{1}$$

Soient α et β les racines de l'équation $r^2 + ar + b = 0$. appelée *<u>équation caractéristique</u>* de (1). Les solutions de l'équation (1) sont de la forme :

$$\boxed{\begin{array}{ll} y = A \exp \alpha x + B \exp \beta x, & \text{si } \alpha \neq \beta \\ y = (Ax + B) \exp \alpha x, & \text{si } \alpha = \beta \end{array}}$$

où A et B sont des constantes arbitraires réelles ou complexes.

8.3.2.2. Remarques

1) Soit

$$y'' + ay' + by = 0, \quad a, b \in \mathbb{C}. \tag{1}$$

i) Si $\alpha \neq \beta$, $\exp \alpha x$ et $\exp \beta x$ sont des solutions particulières de l'équation (1) linéairement indépendantes. En effet si :

$$\lambda \exp \alpha x + \mu \exp \beta x = 0, \quad \forall x, x \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

en faisant $x = 0$ dans (2), on obtient $\lambda + \mu = 0$ et en dérivant (2) par rapport à x, et en faisant $x = 0$, on obtient $\alpha\lambda + \beta\mu = 0$. La seule solution du système

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \alpha\lambda + \beta\mu = 0 \end{cases} \quad \text{pour } \alpha \neq \beta, \text{ est } \lambda = \mu = 0.$$

ii) Si $\alpha = \beta$, α vérifie : (racine double)

$$\begin{cases} \alpha^2 + a\alpha + b = 0 \\ 2\alpha + a = 0 \end{cases}$$

Ces relations entraînent que $\exp \alpha x$ et $x \exp \alpha x$ sont des solutions de (1) linéairement indépendantes.

Donc les solutions de (1) sont définies sur $\mathbb{R}$ et constituent un espace vectoriel complexe de dimension 2.

2) Si a et b sont réels

i) si $a^2 - 4b \geq 0$, α et β sont réels, et les solutions sont de la forme :

$$\begin{cases} y = A \exp \alpha x + B \exp \beta x, & \text{si } \alpha \neq \beta \\ y = (Ax + B) \exp \alpha x, & \text{si } \alpha = \beta \end{cases}$$

où A et B sont des constantes réelles arbitraires.

ii) si $a^2 - 4b < 0$, α et β sont complexes conjugués

$\alpha = \lambda + \mathrm{i}\,\mu$, $\beta = \lambda - \mathrm{i}\,\mu$.

En remplaçant dans $A \exp \alpha x + B \exp \beta x$ (A, B complexes), $\exp \alpha x$ et $\exp \beta x$ par $\exp \lambda x(\cos \mu x + \mathrm{i} \sin \mu x)$, la solution générale se met sous la forme :

$$y = (\exp \lambda x)(L \cos \mu x + M \sin \mu x)$$

où L et M sont des constantes réelles arbitraires. De i) et ii) on déduit que les solutions réelles de l'équation $y'' + ay' + by = 0$ (a, $b \in \mathbb{R}$) constituent un espace vectoriel réel de dimension 2.

3) Même si les constantes a et b sont réelles, on peut avoir à considérer les solutions complexes de l'équation $y'' + ay' + by = 0$. Alors ces solutions constituent un espace vectoriel complexe de dimension 2. Dans ce cas si $f(x)$ est une solution complexe, alors la fonction $\overline{f(x)}$, conjuguée de $f(x)$, est aussi une solution.

8.3.2.3. Exemples

i) Soit l'équation différentielle $y'' - 3y' + 2y = 0$

Son équation caractéristique est $r^2 - 3r + 2 = 0$; les racines sont $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$. D'où la solution générale :

$$y = A \exp x + B \exp 2x, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

ii) L'équation différentielle $y'' + y = 0$ a pour équation caractéristique $r^2 + 1 = 0$. Les racines de cette équation sont $r_1 = \mathrm{i}$ et $r_2 = -\mathrm{i}$. Donc les solutions sont de la forme :

$$y = A \cos x + B \sin x, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

iii) Considérons l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = 0$

Elle a pour équation caractéristique $r^2 - 2r + 1 = 0$. Celle-ci a pour solution double $r_1 = 1$. Donc les solutions sont de la forme :

$$y = (Ax + B) \exp x, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

8.3.3. Recherche d'une solution particulière de

$$y'' + ay' + by = g(x), \quad a, b \in \mathbb{C}, \tag{2}$$

g est une fonction à valeurs complexes.

Comme pour le cas des équations différentielles linéaires du 1er ordre, on procède par étapes :

1) On procède par tâtonnements en remplaçant y par une fonction simple ($x, \sin x, \cos x, \mathrm{e}^x, \ln x$,etc.) selon la forme de l'équation;

2) On écrit si possible $g(x)$ sous la forme d'une somme de fonctions plus simples

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} g_k(x).$$

puis on cherche une solution particulière y_k de l'équation $y'' + ay' + by = g_k(x)$. Une solution particulière de l'équation $y'' + ay' + by = g(x)$ est alors de la forme $y = \sum_{n}^{k=1} y_k$.

3) Si a et b sont réels, et $g(x)$ est une fonction réelle, qui est la partie réelle (resp. partie imaginaire) d'une fonction complexe $h(x)$ « *sympathique* » ($\cos 3x = \mathcal{R}e(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x})$, $\mathrm{e}^x \sin 2x = Im\,(\mathrm{e}^{(1+2\mathrm{i})x})$, ...).

On cherche une solution particulière (complexe) de l'équation $y'' + ay' + by = h(x)$. Si $z_1(x)$ est une telle solution, alors $\mathcal{R}e\,(z_1(x))$ (resp. $Im\,(z_1(x))$ est solution particulière de $y'' + ay' + by = g(x)$.

En effet, posons : $z_1(x) = k_1(x) + \mathrm{i}\,k_2(x)$. On a :

$z_1'' + az_1' + bz_1 = \mathscr{Re}\,(h(x)) + \mathrm{i}\,Im\,(h(x))\,.$

D'où (a, b étant réels)

$(k_1'' + ak_1' + bk_1) + \mathrm{i}\,(k_2'' + ak_2' + bk_2) = \mathscr{Re}\,(h(x)) + \mathrm{i}\,Im\,(h(x))\,.$

Par identification on obtient :

$k_1'' + ak_1' + bk_1 = \mathscr{Re}\,(h(x))\,.$

$k_2'' + ak_2' + bk_2 = Im\,(h(x))\,.$

4) $g(x)$ est un polynôme de degré n : la forme de l'équation montre que l'on peut chercher, comme solution particulière, un polynôme $P(x)$ (de degré n si $b \neq 0$, de degré $n+1$, si $b = 0$) dont on déterminera les coefficients par identification .

5) $g(x) = P(x)\exp\gamma x$, où $P(x)$ est un polynôme, γ une constante réelle ou complexe : on se ramène au cas précédent en faisant le changement de fonction dans l'équation (2) $y \to z$, défini par $y = z\exp\gamma x$.

6) Méthode de la variation des constantes.

On sait que les solutions de l'équation

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{1}$$

constituent un espace vectoriel de dimension deux, dont on a déterminé une base $\{y_1(x), y_2(x)\}$ On cherche une solution particulière de

$$y'' + ay' + by = g(x) \tag{2}$$

sous la forme $y = \lambda_1(x)y_1(x) + \lambda_2(x)y_2(x)$ où $\lambda_1(x)$ et $\lambda_2(x)$ sont des fonctions de classe C^1. En reportant cette expression de y dans l'équation (2), on trouve :

$g(x) = (\lambda_1'y_1' + \lambda_2'y_2') + (\lambda_1'y_1 + \lambda_2'y_2)' + a(\lambda_1'y_1 + \lambda_2'y_2).$

Il suffit alors de prendre $\lambda_1(x)$ et $\lambda_2(x)$ telles que :

$$\boxed{\begin{cases} \lambda_1'y_1 + \lambda_2'y_2 = 0 \\ \lambda_1'y_1' + \lambda_2'y_2' = g(x) \end{cases}} \tag{3}$$

Ce système linéaire a une solution unique en λ_1', λ_2' car le discriminant des inconnues $y_1y_2' - y_1'y_2$ est différent de 0 pour tout x.

Cette propriété peut être vérifiée directement pour les valeurs trouvées pour y_1 et y_2 dans les remarques 8.4.2.2 .

8.3.3.1. Exemples

Trouver une solution particulière des équations différentielles suivantes :

1) $y'' - 2y' + y = (x^2 + x + 1)\exp x$

On pose $y = z\exp x$; en reportant dans l'équation on trouve $z'' = x^2 + x + 1$.

D'où $z' = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + x + A$ et $z = \dfrac{x^4}{12} + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^2}{2} + Ax + B$.

On peut prendre comme solution particulière $z_1 = \dfrac{x^4}{12} + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^2}{2}$. $(A = B = 0)$, d'où $y_1 = z_1 \exp x$.

2) $y'' + y = \cos^2 x$

Comme $\cos^2 x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\cos 2x}{2}$, l'équation s'écrit

$$y'' + y = \frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{2}$$

On est amené à chercher une solution particulière pour

$$y'' + y = \frac{1}{2} \tag{1}$$

et une solution particulière de

$$y'' + y = \frac{1}{2}\cos 2x = \mathscr{Re}\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\,x}\right). \tag{2}$$

$y_1 = \dfrac{1}{2}$ est une solution particulière de (1). On cherche une solution particulière de

$$y'' + y = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\,x}$$

en posant $y = z\,\mathrm{e}^{2ix}$ on obtient l'équation $z'' + 4iz' - 3z = \dfrac{1}{2}$ dont une solution particulière est $z_2 = -\dfrac{1}{6}$. Donc une solution particulière de (3') est $y_2 = z_2 \exp 2\mathrm{i}\,x = -\dfrac{1}{6}\exp 2\mathrm{i}\,x$ et par suite $\mathscr{Re}\left(\dfrac{1}{6}\exp 2\mathrm{i}\,x\right) = -\dfrac{1}{6}\cos 2x$ est une solution particulière de (2).

En définitive une solution particulière de $y'' + y = \cos^2 x$ est $f(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{6}\cos 2x$.

3)

$$y'' + y = \operatorname{tg} x, \quad \text{pour } x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

On sait que $y_1 = \cos x$ et $y_2 = \sin x$ sont deux solutions indépendantes de $y''+y = 0$. On cherche une solution particulière sous la forme $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$, où λ_1 et λ_2 sont des fonctions de x de classe C^1. On doit donc résoudre le système :

$$\begin{cases} \lambda_1' \cos x + \lambda_2' \sin x = 0 \\ -\lambda_1' \sin x + \lambda_2' \cos x = \operatorname{tg} x \end{cases}$$

Celui-ci a pour solution $\lambda_1' = -\sin x \operatorname{tg} x$ et $\lambda_2' = \sin x$. D'où

$$\lambda_1 = -\int \sin x \operatorname{tg} x \,\mathrm{d}\, x = \sin x - \ln\left|\frac{1}{\cos x} + \operatorname{tg} x\right|$$
$$\lambda_2 = \int \sin x \,\mathrm{d}\, x = -\cos x.$$

et $y = \lambda_1 \cos x + \lambda_2 \sin x = -\cos x \ln\left|\dfrac{1}{\cos x} + \operatorname{tg} x\right|.$

8.4. À RETENIR

1) L'équation différentielle

$$y' - a(x)y = 0$$

$a \; : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ étant une fonction continue a pour solution générale $y = K \exp A(x)$. où K est une constante arbitraire et $A(x)$ une primitive de $a(x)$ sur l'intervalle I.

2) L'équation différentielle

$$y' - a(x)y = b(x).$$

$b \; : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ étant une fonction continue a pour solution générale $y = (K + C(x)) \exp A(x)$. où $C(x) \exp A(x)$ est une solution particulière. avec :

$C(x) = \int (b(x) \exp -A(x)) \,\mathrm{d}\, x.$

3) Les solutions de :

$$y'' + ay' + by = 0, \qquad a, b \in \mathbb{C} \tag{1}$$

sont. α et β étant les racines de l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$.

$$\boxed{\begin{array}{l} y = A \exp \alpha x + B \exp \beta x. \text{ si } \alpha \neq \beta \\ y = (Ax + B) \exp \alpha, \text{ si } \alpha = \beta \end{array}}$$

A et B sont des constantes arbitraires, réelles ou complexes.

Les solutions de

$$y'' + ay' + by = f(x) \tag{2}$$

sont obtenues en ajoutant aux solutions de (1) une solution particulière de l'équation (2).

8.5. Exercices et problèmes

1) Intégrer les équations différentielles suivantes :

a) $y' + y\cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x$.

b) $y' = 1 + \operatorname{tg}^2 x$.

c) $(1+x^2)y' - 1 - y^2 = 0$.

d) $(y+3)\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y = 0$.

e) $\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}y - 2\sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}x = 0$.

f) $x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = \sqrt{x^2+y^2}$.

2) Soit l'équation différentielle $xy' - 2y - x^2 = 0$. a) Déterminer ses solutions dans les intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

b) Montrer que l'on peut « raccorder » ces solutions sur $\mathbb{R}$ tout entier

c) Déterminer toutes les solutions sur $\mathbb{R}$ qui valent 0 pour $x = 1$.

2) Intégrer les équations différentielles suivantes :

$y'' + 2y' + 10y = \sin x$

$y'' + m^2 y = x\cos mx$

$y'' + 2y' + y = \mathrm{e}^x \cos 3x$

$y'' - 3y' + 2y = x$.

$y'' + y = 3\sin x$.

3) a) Intégrer l'équation différentielle

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

b) En déduire les solutions de l'équation :

$$y'' - 5y' + 6y = \frac{\mathrm{e}^x}{\operatorname{ch}^2 x}$$

(en utilisant les résultats du 8.4.3.6) .

4) On considère l'équation différentielle

$$(1+x^2)y'' + 5xy' + 3y = 0 \qquad (E)$$

a) Montrer qu'il existe deux polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ tels que $(1+x^2)y'' + 5xy' + 3y$ soit, quel que soit x, la dérivée par rapport à x de $[y'.P(x) + yQ(x)]$.

b) En déduire la solution générale de (E) .

5) a) Trouver les solutions de l'équation différentielle suivante :

$$x(x^2+3y^2)\,\mathrm{d}x + y\,(y^2+3x^2)\,\mathrm{d}y = 0 \qquad (E)$$

b) En posant $x = u + 1$, $y = v$, ramener l'équation différentielle

$$(3y - 7x + 7)\,\mathrm{d}x + (7y - 3x + 3)\,\mathrm{d}y = 0$$

à une équation homogène, puis trouver ses solutions.

6) a) Intégrer l'équations différentielle

$$(\operatorname{sh} x)y' - (\operatorname{ch} x)y + 1 = 0. \tag{1}$$

b) Déterminer l'intégrale particulière qui tend vers une limite finie quand x tend vers $-\infty$; on désigne par C_1 la courbe représentative.

c) Déterminer l'intégrale particulière qui tend vers une limite finie quand x tend vers $+\infty$; on désigne par C_2 la courbe représentative.

d) Représenter graphiquement C_1 et C_2 dans le plan muni d'un repère orthonormé Oxy .

e) Montrer que toute courbe intégrable passe par un point fixe A que l'on déterminera.

7) Soit

$$y' + a(x)y = b(x) \ : \tag{E'}$$

une équation différentielle linéaire à coefficients périodiques de période 1; on pose

$$\alpha(x) = \exp\left(-\int_0^x a(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

a) Montrer que $x \mapsto \alpha(x)$ est une solution de l'équation sans second membre associée à (E).

b) Montrer que pour tout x, on a : $\alpha(x+1) = \alpha(1)\cdot\alpha(x)$.

c) Montrer que la solution générale y de (E) est définie par

$$y(x) = \alpha(x)\left(A + \int_0^x \frac{b(t)}{\alpha(t)}\,\mathrm{d}t\right).$$

d) On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{b(t)}{\alpha(t)}\,\mathrm{d}t$ et $h(x) = \displaystyle\int_0^{x+1} \frac{b(t)}{\alpha(t)}\,\mathrm{d}t$.

Calculer la dérivée de h; en déduire que l'on a pour tout x :

$$f(x+1) = f(1) + \frac{1}{\alpha(1)}f(x).$$

e) Montrer que si $\alpha(1)$ est différent de 1, l'équation (E) admet une solution unique de période 1 dont on donnera l'expression .

8) Équation de Bernoulli .

a) On considère l'équation différentielle

$$y' + f(x)y = g(x)y^n. \tag{E}$$

En posant $z = y^{1-n}$, montrer que (E) se ramène à une équation différentielle linéaire

$$z' + (1-n)f(x)z = (1-n)g(x).$$

b) Application : trouver les solutions de l'équation différentielle $y' + x^2y = y^3\cos x$.

9) D'après la loi de Newton, la vitesse de refroidissement d'un corps quelconque dans l'air est proportionnelle à la différence des températures du corps et du milieu. La température de l'air étant de 20°C, le corps se refroidit de 100°C à 60°C en l'espace de 20 minutes. En combien de temps sa température tombera-t-elle à 30°C?

10) Une particule de masse m située à 500 m de la terre au temps $t = 0$, fait une chute verticale. On suppose que la résistance de l'air R est proportionnelle à la vitesse de la particule. On note g l'accélération de la pesanteur. A quel instant la particule atteindra-t-elle la terre?

11) On veut déterminer les applications différentiables de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifient l'équation :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (x^4 + y^4)^{1/2} \qquad (E)$$

i) Montrer que la fonction $g(x, y) = (x^4 + y^4)^{1/2}$ est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et que $\frac{1}{2}g(x, y)$ est solution du (E).

ii) Montrer que f est solution de (E) si et seulement si $F = f - \dfrac{1}{2}g$ vérifie :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad x\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 0.$$

iii) En passant aux coordonnées polaires (r, θ) montrer que l'équation (E) devient :

$$r\frac{\partial F}{\partial r} = 0.$$

En déduire les solutions de (E) .

Index historique

Archimède (287-212 avant J.-C.) : mathématicien grec, un des précurseurs de l'analyse infinitésimale. A Syracuse, il dirigea des travaux portuaires, navals et militaires.

Bernoulli (Les) : famille de mathématiciens suisses, qui joua durant tout le XVIII^{e} siècle un rôle de premier plan. Jacques (1654-1705), Jean (1667-1748) et Daniel (1700-1782) ont établi des résultats importants, en analyse, en calcul des probabilités et en mécanique.

Bernstein Serge Nathanovitch (1880-1968) : mathématicien russe, ses travaux portent sur l'approximation des fonctions continues par des polynômes et le calcul des probabilités.

Bolzano Bernard (1781-1848) : né à Prague, Bolzano fit des études de théologie et de mathématiques. Prêtre en 1804, il occupa la chaire de philosophie de la religion en 1805 à l'université de cette ville, avant d'être destitué en 1819 pour ses idées non conformistes.

Cauchy Augustin Louis (1789-1857) : né à Paris, Cauchy, après l'Ecole Polytechnique, passa par l'Ecole des Ponts et Chaussées et participa comme ingénieur à divers travaux publics. Membre de l'Académie des Sciences en 1816, il fut le plus prolifique des mathématiciens après Euler. Son œuvre, dont une part importante est consacrée à l'analyse, embrasse tous les domaines des mathématiques.

Darboux Jean Gaston : né à Nîmes en 1842, il mourut à Paris en 1917. Ses travaux portent sur la géométrie différentielle, la théorie de l'intégration et les équations aux dérivées partielles. Il fut élu à l'Académie des Sciences en 1904 et est à l'origine de la modification complète du régime de la licence, de l'établissement du doctorat mention sciences et du développement de l'université de Paris.

Dini Ulisse (1845-1918) : mathématicien italien, ses travaux portent sur la géométrie et l'analyse, en particulier les séries de Fourrier.

Euclide (vers 295 avant J.-C.) : fondateur de l'école mathématiques d'Alexandrie. On sait très peu de choses sur sa vie. Son œuvre fondamentale, « les Éléments», codifie la mathématique grecque qu'utiliseront après lui Appolonios de Perga et Archimède.

Euler Léonhard (1707-1783) : mathématicien et physicien suisse. Un des plus grands mathématiciens de tous les temps et le plus prolifique. Devenu aveugle vers 1768, il continua à travailler grâce à une mémoire prodigieuse. Son œuvre couvre tous les domaines des mathématiques: calcul différentiel, équations différentielles, géométrie, fonctions circulaires, mécanique,...

Fermat (Pierre de) : mathématicien français (1601-1665) connu pour ses travaux dans le domaine du calcul infinitésimal et la théorie des nombres. Son célèbre problème (solutions entières de l'équation $x^n + y^n = z^n$, $n \geq 3$) ne fut résolu, semble-t-il, que tout récemment.

Lagrange Joseph Louis (1736-1813) : mathématicien français, a fait d'importantes découvertes dans tous les domaines des mathématiques. Membre de la Commission des poids et mesures et du bureau des longitudes dès 1795.

Leibniz Gottfried Wilhelm (1646-1716) : mathématicien allemand, fut conseiller à la cour suprême de Mayence et conseiller de Pierre Le Grand de Russie. Ses œuvres en algèbre et logique sont restées inédites pendant longtemps.

Lipschitz Rudolf Otto Sigismund (1832-1903) : mathématicien allemand. Travaux dans la théorie des équations différentielles et physique mathématique, théorie des nombres.

Mac-Laurin Colin (1698-1746) : mathématicien écossais, disciple de Newton. Son traité des fluxions (1742) contient notamment la formule du développement en série entière d'une fonction, qui porte son nom.

Minkowski Herman (1864-1909) : mathématicien allemand, inventa la méthode dite « géométrie des nombres », consistant à utiliser des considérations géométriques en théorie des nombres. Il a aussi laissé des travaux importants dans la théorie mathématique de la relativité restreinte.

Newton (Sir Isaac) : mathématicien britannique (1642-1727). En 1687 apparaît son œuvre principale : *Philosophiæ naturalis principia mathematica* dans laquelle il expose notamment ses travaux en analyse et la théorie de la gravitation universelle

Polya George (1887-) : mathématicien hongrois, connu pour ses travaux en analyse complexe, probabilité, théorie des nombres.

Riemann Georg Friederich Bernard (1826-1866) : mathématicien allemand, mourut de tuberculose. En plus de ses travaux en analyse, il jeta les bases de la topologie différentielle et de la géométrie différentielle. Les variétés Riemanniennes font encore l'objet de recherches intenses.

Rolle Michel (1652-1719) : mathématicien français. Sa « méthode des cascades » utilisée pour la séparation des racines des équations algébiques n'a qu'un rapport lointain avec le théorème qui porte son nom.

Schwartz Hermann Amandus (1843-1921) : membre des académies bavaroise et prussienne des Sciences, succéda en 1892 à Weierstrass à l'université de Berlin. Il a produit d'importants travaux en analyse.

Serret Alfred (1819-1885) : mathématicien français. Son nom reste attaché à côté de celui de F.J. Frenet (1816-1900), aux foormules vectorielles liant l'arc, la courbure et la torsion des courbes gauches.

Taylor Brook (1685-1731) : mathématicien anglais. Dans son ouvrage principal *Methodus incrementorum directa et inversa* (1715), il établit la célèbre formule à laquelle son nom est resté attaché, ainsi que d'autres résultats importants d'analyse.

Weierstrass Karl Theodor Wilhelm (1815-1897) : mathématicien allemand, membre de l'Académie des sciences de Berlin en 1856. Après Cauchy et Riemann, il a achevé de mettre l'analyse sur les bases entièrement rigoureuses et il y a apporté de très belles découvertes.

Index terminologique

Imprimé en France par I.M.E. - 25110 Baume-les-Dames
Dépôt légal n° 4058-03-1996
Collection n° 49 - Edition n° 01
59/4387/3

La collection **Universités francophones**, créée en 1988 à l'initiative de l'**UREF**, propose des ouvrages de référence, des manuels spécialisés et des actes de colloques scientifiques aux étudiants de deuxième et troisième cycle universitaire ainsi qu'aux chercheurs francophones et se compose de titres originaux paraissant régulièrement.

Leurs auteurs appartiennent conjointement aux pays du Sud et du Nord et rendent compte des résultats de recherches et des études récentes entreprises en français à travers le monde. Ils permettent à cette collection pluri-disciplinaire de couvrir progressivement l'ensemble des enseignements universitaires en français.

Enfin, la vente des ouvrages à un prix préférentiel destinés aux pays du Sud tient compte des exigences économiques nationales et assure une diffusion adaptée aux pays francophones.

Ainsi, la collection **Universités francophones** constitue une bibliothèque de référence comprenant des ouvrages universitaires répondant aux besoins des étudiants de langue française.

Les auteurs de ce livre ont la double vocation de chercheurs et d'enseignants. Leur ouvrage couvre largement le programme d'Analyse de 1re année du 1er cycle universitaire, avec des compléments importants sur la convergence uniforme, les fonctions de plusieurs variables et les fonctions vectorielles.

A la fin de chaque chapitre se trouve un résumé regroupant les principaux résultats ainsi qu'un choix judicieux d'exercices et de problèmes d'applications, illustrant et complétant le cours.

Le tout constitue, c'est le souhait des auteurs, un outil de travail précieux pour les étudiants du 1er cycle universitaire scientifique ainsi que pour les élèves des classes de Mathématiques supérieures.

*

* *

Edmond FEDIDA, agrégé de mathématiques, docteur ès sciences mathématiques, est professeur des Universités françaises. Il est actuellement, dans le cadre de la Coopération, professeur à l'Université d'Abidjan, après avoir servi, dans le même cadre, durant plusieurs années comme professeur à l'Université de Dakar (UCAD).

Mamadou SANGHARE, docteur ès sciences mathématiques, est maître de conférences et directeur de l'Institut de Recherche pour l'Enseignement des Mathématiques, de la Physique et de la Technologie, (IREMPT) de l'université de Dakar (UCAD).

El Hadji Cheikh M'backé DIOP, docteur en sciences mathématiques, est maître-assistant à l'Université de Dakar (UCAD).

Europe occidentale, Amérique du Nord, Japon : 160 FF • Autres pays (prix préférentiel UREF) : 40 FF

9 782850 698392

I.S.S.N. 0993-3948
Diffusion HACHETTE ou ELLIPSES selon pays
Distribution Canada D.P.L.U.

59.4387.3
Imprimé en France
S.S.Q.I. - PARIS