



U R E F

ALGÈBRE

PREMIER CYCLE

MP₁

Saliou Touré





UNIVERSITÉS FRANCOPHONES



U R E F

ALGÈBRE

PREMIER CYCLE

MP₁

Saliou Touré

EDICEF

58, rue Jean-Bleuzen
92178 VANVES Cedex

Diffusion EDICEF ou ELLIPSES selon pays

© EDICEF, 1991

ISBN 2-850-69697-8

ISSN 0993-3948

La loi du 11 mars 1957 n'autorise, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41, que « les copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » d'une part, et, d'autre part, que « les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration », toute représentation ou reproduction, intégrale ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur, ou de ses ayants-droit ou ayants-cause, est illicite (loi du 11 mars 1957, alinéa 1^{er} de l'article 40). Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal.

SOMMAIRE

INTRODUCTION	7
Chapitre 1 : ENSEMBLES – APPLICATIONS – RELATIONS	9
1.1. Notion de logique	9
1.1.1. Propositions – Connecteurs	9
1.1.2. Quantificateurs	11
1.2. Ensembles	12
1.2.1. Définitions et notations	12
1.2.2. Parties d'un ensemble – Complémentaire	13
1.2.3. Intersection et réunion de deux ensembles	14
1.2.4. Produit d'ensembles	16
1.3. Applications	17
1.3.1. Définitions – Exemples	17
1.3.2. Compositions des applications	18
1.3.3. Applications injectives, surjectives, bijectives	19
1.3.4. Images directes et images réciproques	21
1.3.5. Familles	23
1.3.6. Fonctions de plusieurs variables	24
1.4. Relations dans un ensemble	25
1.4.1. Définitions – Exemples	25
1.4.2. Relations d'équivalence	26
1.4.3. Relations d'ordre	29
1.4.4. Applications monotones – Applications dans un ensemble ordonné	31
1.4.5. Intervalles	32
1.5. Entiers naturels – Ensembles finis	33
1.5.1. L'ensemble des entiers naturels	33
1.5.2. Ensembles finis – Cardinaux	34
1.6. Ensembles dénombrables	37
1.6.1. Définition – Exemples	37
1.6.2. Propriétés élémentaires	38
1.7. Analyse combinatoire	40
1.7.1. Arrangements avec répétition	40
1.7.2. Arrangements sans répétition – Permutations	42
1.7.3. Combinaisons sans répétition	43
Chapitre 2 : LOIS DE COMPOSITION	46
2.1. Généralités	46
2.1.1. Définitions – Notations – Exemples	46
2.1.2. Parties stables – Lois induites	47
2.1.3. Composé de deux parties	47
2.1.4. Translations	48
2.2. Propriétés des lois de composition internes	48
2.2.1. Lois associatives	48
2.2.2. Lois commutatives	49
2.2.3. Élément neutre	50
2.2.4. Éléments symétrisables	52
2.2.5. Distributivité	54
2.2.6. Loi quotient	54
2.3. Morphismes	55
2.3.1. Définition – Exemples	55
2.4. Lois de composition externes	56
2.4.1. Définition – Notation	56
2.4.2. Parties stables – Lois induites	56
2.4.3. Restriction du domaine d'opérateurs	56

COURS D'ALGÈBRE

Chapitre 3 : GROUPEs	57
3.1. Généralités	57
3.1.1. Définitions – Exemples	57
3.2. Sous-groupes d'un groupe	59
3.2.1. Définition et caractérisation d'un sous-groupe	59
3.2.2. Sous-groupe engendré par une partie	60
3.3. Morphismes de groupes	62
3.3.1. Définitions – Exemples	62
3.3.2. Propriétés des morphismes de groupes	63
3.4. Groupes-quotients	65
3.4.1. Classes modulo un sous-groupe	65
3.4.2. Groupes-quotients	67
3.4.3. Décomposition canonique d'un homomorphisme	68
3.4.4. Applications aux groupes cycliques	70
3.5. Groupes symétriques	72
3.5.1. Généralités	72
3.5.2. Transpositions	73
3.5.3. Signature d'une permutation	74
3.6. Groupes opérant sur un ensemble	77
3.6.1. Définitions – Exemples	77
3.6.2. Sous-groupe d'isotropie – Orbites	78
Chapitre 4 : ANNEAUX ET CORPS	80
4.1. Structure d'anneaux	80
4.1.1. Définitions – Exemples	80
4.1.2. Règles de calcul dans un anneau	83
4.1.3. Propriétés élémentaires des anneaux	85
4.2. Sous-anneaux – Idéaux – Anneaux-quotients	87
4.2.1. Sous-anneaux	87
4.2.2. Idéaux	88
4.2.3. Anneaux-quotients	90
4.3. Morphismes d'anneaux	91
4.3.1. Définition et propriétés des morphismes d'anneaux	91
4.3.2. Décomposition canonique d'un morphisme d'anneaux	92
4.3.3. Caractéristique d'un anneau	93
4.4. Divisibilité dans un anneau	94
4.4.1. Généralités	94
4.4.2. Plus grand commun diviseur	95
4.4.3. Plus petit commun multiple	98
4.5. Corps	99
4.5.1. Définitions – Propriétés fondamentales	99
4.5.2. Sous-corps – Idéaux d'un corps – Morphismes de corps	100
4.5.3. Corps des fractions d'un anneau commutatif intègre	102
Chapitre 5 : POLYNÔMES ET FRACTIONS RATIONNELLES	104
5.1. Définitions générales	104
5.2. Structure d'anneau de $K[X]$	105
5.2.1. Addition de deux polynômes	105
5.2.2. Multiplication de deux polynômes	106
5.3. Notation définitive	109
5.3.1. Immersion de K dans $K[X]$	109
5.3.2. Notion d'indéterminée	110
5.4. Propriétés arithmétiques de $K[X]$	110
5.4.1. Division euclidienne dans $K[X]$	111
5.4.2. Idéaux de $K[X]$	113
5.4.3. Plus grand commun diviseur	114
5.4.4. Plus petit commun multiple	117
5.4.5. Polynômes irréductibles	118
5.5. Division suivant les puissances croissantes	120
5.6. Fonctions polynômes – Racines d'un polynôme	123

5.6.1. Fonctions polynômes	123
5.6.2. Racines d'un polynôme	124
5.7. Étude de $\mathbb{C}[X]$ et de $\mathbb{R}[X]$	126
5.7.1. Corps algébriquement clos	126
5.7.2. Polynômes de $\mathbb{C}[X]$	128
5.7.3. Polynômes de $\mathbb{R}[X]$	129
5.7.4. Relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme	130
5.8. Dérivation des polynômes	131
5.8.1. Dérivée d'un polynôme	131
5.8.2. Formule de Taylor	133
5.9. Polynômes à plusieurs indéterminées	135
5.9.1. Définitions générales	136
5.9.2. Isomorphisme canonique de $K[X][Y]$ sur $K[X, Y]$	137
5.9.3. Degrés d'un polynôme à deux indéterminées	138
5.9.4. Fonctions polynômes	138
5.9.5. Dérivation partielle des polynômes	139
5.10. Définition du corps des fractions rationnelles	141
5.10.1. Fractions rationnelles	142
5.10.2. Fonction rationnelle	144
5.11. Décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples	146
5.11.1. Théorèmes généraux	146
5.11.2. Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle sur \mathbb{C}	149
5.11.3. Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle sur \mathbb{R}	152
Chapitre 6 : ESPACES VECTORIELS	155
6.1. Définition d'un espace vectoriel	155
6.1.1. Définitions	155
6.1.2. Règles de calcul dans un espace vectoriel	156
6.1.3. Exemples d'espaces vectoriels	157
6.2. Sous-espaces vectoriels	159
6.2.1. Définitions – Exemples	159
6.2.2. Intersection de sous-espaces vectoriels. Sous-espace engendré par une partie d'un espace vectoriel	160
6.2.3. Espaces vectoriels quotients	161
6.2.4. Somme de sous-espaces vectoriels	161
6.3. Familles génératrices – Familles libres – Bases	165
6.3.1. Familles génératrices	165
6.3.2. Familles libres	167
6.3.3. Bases d'un espace vectoriel	168
6.3.4. Familles infinies	170
Chapitre 7 : APPLICATIONS LINÉAIRES	172
7.1. Généralités	172
7.1.1. Définitions	172
7.1.2. Exemples	173
7.2. Propriétés des applications linéaires	174
7.2.1. Composée de deux applications linéaires	174
7.2.2. Image et noyau d'une application linéaire	175
7.2.3. Applications linéaires et familles de vecteurs	176
7.2.4. Décomposition canonique d'une application linéaire	180
7.3. L'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$	181
7.3.1. Addition dans $\mathcal{L}(E, F)$	182
7.3.2. Produit d'une application linéaire par un scalaire	182
7.3.3. Cas particulier : $E = F$	183
7.4. Projecteurs	184
7.4.1. Définition	184
7.4.2. Propriétés des projecteurs	185
Chapitre 8 : ESPACES VECTORIELS DE DIMENSION FINIE	187
8.1. Le théorème de la dimension	187

COURS D'ALGÈBRE

8.1.1. Existence de bases en dimension finie	187
8.1.2. Dimension	188
8.1.3. Dimension d'un sous-espace vectoriel	192
8.2. Applications linéaires en dimension finie	195
8.2.1. Dimension de $\mathcal{L}(E, F)$	195
8.2.2. Espaces vectoriels isomorphes	197
8.2.3. Rang d'une application linéaire, d'une famille de vecteurs	198
8.3. Dualité	201
8.3.1. Dual d'un espace vectoriel	201
8.3.2. Bidual d'un espace vectoriel	203
8.3.3. Orthogonalité	204
8.3.4. Transposée d'une application linéaire	206
Chapitre 9 : MATRICES	209
9.1. Généralités	209
9.2. Matrice d'une application linéaire	209
9.2.1. Définitions, exemples et théorèmes	209
9.3. Opérations sur les matrices	215
9.3.1. Égalité de deux matrices	216
9.3.2. Addition des matrices	216
9.3.3. Multiplication d'une matrice par un scalaire	217
9.3.4. Produit de deux matrices	218
9.4. Matrices inversibles – Changement de bases	220
9.4.1. Matrices inversibles	220
9.4.2. Changement de bases	222
9.4.3. Matrices équivalentes	227
Chapitre 10 : DÉTERMINANTS	230
10.1. Applications et formes bilinéaires	230
10.1.1. Applications et formes bilinéaires alternées	230
10.1.2. Cas où $\dim(E) = 2$	232
10.1.3. Déterminant d'ordre 2	233
10.1.4. Déterminant d'un endomorphisme	233
10.1.5. Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2	235
10.2. Applications et formes multilinéaires	236
10.2.1. Applications et formes multilinéaires alternées	237
10.2.2. Propriétés des applications et des formes multilinéaires alternées	238
10.3. Déterminants	242
10.3.1. Déterminant d'un système de vecteurs	242
10.3.2. Déterminant d'un endomorphisme	243
10.3.3. Déterminant d'une matrice carrée	245
10.3.4. Calculs des déterminants	248
Chapitre 11 : APPLICATIONS DES DÉTERMINANTS	254
11.1. Calcul de l'inverse d'une matrice carrée	254
11.2. Détermination du rang	256
11.3. Systèmes d'équations linéaires	260
11.3.1. Définitions	260
11.3.2. Interprétations d'un système d'équations linéaires	260
11.4. Systèmes de Cramer	261
11.4.1. Définition	262
11.4.2. Formules de Cramer	263
11.5. Résolution d'un système linéaire quelconque	265
11.5.1. Équations principales – Inconnues principales	265
11.5.2. Condition de compatibilité et résolution	266
11.6. Systèmes homogènes	269
PROBLÈMES	271
BIBLIOGRAPHIE	287

Introduction

L'algèbre générale et l'algèbre linéaire sont des outils fondamentaux dans les disciplines mathématiques modernes (analyse, analyse fonctionnelle, probabilité, physique mathématique, etc.). Elles constituent par conséquent des éléments essentiels du bagage mathématique indispensable aux mathématiciens, physiciens, ingénieurs et autres scientifiques.

Le cours d'algèbre que nous soumettons aujourd'hui au public s'adresse aux étudiants en mathématiques du premier cycle des universités et aux étudiants préparant l'entrée dans les grandes écoles scientifiques. Il peut également être utile aux scientifiques qui désirent se recycler en mathématiques et à tous ceux qui veulent acquérir de bonnes connaissances de base en algèbre.

L'expérience montre que le passage de la classe terminale à la première année de faculté constitue pour la majorité des étudiants une difficulté quasi insurmontable. C'est pourquoi nous nous sommes efforcés, dans la rédaction de ce livre, de répondre à une double exigence : d'une part, présenter chaque notion nouvelle à partir du début sans supposer que les étudiants en ont entendu parler et, d'autre part, faire un exposé qui, tout en couvrant l'ensemble des programmes, ne s'y cantonne pas strictement, et soit assez rigoureux et assez riche pour servir de base à une solide formation mathématique. Le livre est ainsi conçu en fonction des besoins immédiats et futurs des étudiants. Sans jamais abandonner la rigueur des démonstrations, nous avons voulu illustrer notre exposé par de nombreux exemples et remarques qui, nous l'espérons, aideront le lecteur à mieux assimiler les notions introduites.

Nous voudrions insister une fois de plus sur le fait que « faire des mathématiques » c'est d'abord et avant tout « résoudre des problèmes ». **Il faut donc, après avoir appris et compris son cours, l'assimiler en résolvant des exercices.** De nombreux exercices et problèmes placés à la fin du livre permettront au lecteur de contrôler l'acquisition de ses connaissances. Certains d'entre eux sont des applications immédiates d'un résultat du cours et doivent servir de test d'assimilation. D'autres, plus difficiles, présentent des compléments qu'il peut être utile de connaître.

Le livre comprend deux grandes parties.

Les chapitres 1 à 5 sont consacrés aux notions d'algèbre générale. Après une étude générale des structures algébriques les plus courantes (relations d'équivalence et d'ordre, groupes, anneaux, corps), le chapitre 5 traite l'anneau des polynômes et le corps des fractions rationnelles.

Les chapitres 6 à 11 sont consacrés à l'algèbre linéaire et abordent l'étude des espaces vectoriels de dimension finie, des applications linéaires, des matrices, des déterminants et des systèmes d'équations linéaires.

COURS D'ALGÈBRE

Il nous paraît bon de signaler que cet ouvrage repose en grande partie sur le cours que nous dispensons à la Faculté des Sciences et Techniques d'Abidjan. Les réactions de plusieurs générations d'étudiants nous ont grandement guidés dans sa mise en forme définitive.

Nous avons beaucoup utilisé plusieurs livres d'Algèbre parus au cours des dernières décennies. On en trouvera une liste non exhaustive dans la bibliographie.

Des erreurs et des imperfections, il y en a certainement. Nous espérons que de nombreux lecteurs et collègues voudront bien nous soumettre critiques et suggestions afin de nous permettre d'apporter les améliorations qui s'imposent à l'occasion des prochaines éditions. D'avance nous les en remercions.

Je remercie vivement Madame Nadine BELLAMY dont les critiques, les suggestions et le goût du travail bien fait m'ont permis d'améliorer la présentation de nombreux points délicats de l'exposé.

Je remercie Monsieur Henri DICI d'avoir lu le manuscrit et de m'avoir signalé quelques imprécisions.

Mes remerciements vont également à Monsieur N'Cho ADOU pour la compétence et le dévouement avec lesquels il a assuré la dactylographie.

Saliou TOURÉ